Neiva, _____17 septiembre de 2019_______

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

Los suscritos, Jessica Alexandra Santanilla García identificada con cedula de ciudadanía No. 1.024.530.226 y Fernando Fierro González identificado con cedula de ciudadanía No. 1.079.182.151. Autores del trabajo de grado titulado: "**DINAMICA DEL MODELO DE HESTON Y LA CARACTERIZACIÓN DE LA CALIBRACIÓN PARA OPCIONES IBEX35",** presentado y aprobado en el año 2019 como requisito para optar al título de **MATEMATICO;** Autorizamos al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores" , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

FERNANDO FIERRO GONZALEZ

Firma: ___________________________

JESSICA ALEXANDRA SANTANILLA GARCIA

Firma: ___________________________

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: DINAMICA DEL MODELO DE HESTON Y LA CARACTERIZACIÓN DE LA CALIBRACIÓN PARA OPCIONES IBEX35

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
SANTANILLA GARCIA	JESSICA ALEXANDRA
FIERRO GONZALEZ	FERNANDO

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
MEDINA ARCE	YINETH

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: MATEMATICO

FACULTAD: CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

PROGRAMA O POSGRADO: MATEMATICA APLICADA

CIUDAD: NEIVA **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2019 **NÚMERO DE PÁGINAS: 81**

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**):

Diagramas_X__ Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general_X__ Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros_X_

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento:

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*:

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español	inglés
1. Calibración	Calibration
2. volatilidad	Volatility
3. derivados financieros	Financial Derivatives
4. Modelo de Heston	Heston model
5. IBEX 35	IBEX 35

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

Las finanzas permiten a los países hacer un uso completo de los activos de manera eficiente para mejorar la calidad de vida promedio de toda la sociedad. Muchas personas tienen la necesidad de comprar uno o más tipos de servicios ofrecidos por entidades financieras, como empresas de gestión de activos y bancos. Dichos bancos se enfocan en recaudar billones de dólares de diferentes fuentes. Sin embargo, el mundo financiero está lleno de riesgos, tanto así, que uno de los problemas principales para las entidades financieras es, cómo administrar de manera segura la enorme cantidad de dinero que poseen, y los medios para solucionar dichos problemas son los derivados financieros, que pueden ser considerados como el seguro para las estrategias de inversión. Particularmente, uno de los derivados más utilizados son las opciones, las cuales, son contratos financieros que otorgan al comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender, una cantidad determinada de un activo financiero subyacente, a un precio y fecha determinada (Heston, 1993). De lo anterior, la valoración de las opciones es de suma importancia para poder compensar el riesgo derivado de los cambios inesperados de los precios en los mercados financieros. Especialmente, los inversionistas pueden incurrir en pérdidas financieras considerables debido a las fluctuaciones en los precios de las divisas, dado que el valor de una opción se ve afectado por el desempeño de su

subyacente, por eso es crucial estudiar la dinámica de los precios de la seguridad considerada.
En consecuencia, de lo anterior, en muchos mercados financieros, como la renta variable y la tasa de interés, la llamada sonrisa de volatilidad aparece como una característica importante de los modelos de precios (Corrado y Su, 1997). Ya que, es el reflejo del comportamiento no constante en las volatilidades del mercado para opciones a diferentes precios de ejercicio con una sola fecha de vencimiento. Es bien sabido que el marco clásico Black-Scholes no puede reproducir la sonrisa de volatilidad observada en el mercado, debido a la constante volatilidad asumida (Hull , 2012). Es por esto que Cuesta (S.f), señala que los modelos de volatilidad estocástica son un avance importante en la investigación financiera para evitar este inconveniente. Entre estos modelos más sofisticados, el modelo Heston se ha convertido en uno de los más utilizados por los profesionales. Su importancia para este estudio radica en la obtención de una solución de forma cerrada por el precio de una opción de compra europea en un activo con volatilidad estocástica. Además, es altamente eficiente debido a su fácil implementación. Es por esto, que para el presente trabajo de grado se centra en la dinámica del modelo de Heston y la caracterización de la calibración para opciones ibex 35, que describe la volatilidad del activo como un proceso estocástico. Dichas opciones son los derivados plain vanilla, que son uno de los principales productos negociados en las bolsas de derivados. En particular se estudia la opción europea IBEX 35 con el objetivo de presentar el modelo de Heston, enfatizando en la calibración y evaluación de dicho modelo. Para lo anterior, se parte de los datos recogidos del boletín diario del MEFF. Del mismo modo, se estudiará una metodología para calibrar y evaluar los parámetros del modelo Heston basado en las volatilidades implícitas del mercado.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

Finances allow countries to make full use of assets efficiently to improve the average quality of life of the entire society. Many people have the need to buy one or more types of services offered by financial entities, such as asset management companies and banks. These banks focus on raising billions of dollars from different sources. However, the financial world is full of risks, so much so, that one of the main problems for financial institutions is, how to safely manage the huge amount of money they have, and the means to solve these problems are financial derivatives , which can be considered as insurance for investment strategies. Particularly, one of the most used derivatives are the options, which are financial contracts that grant the buyer the right, but not the obligation, to buy or sell, a certain amount of an underlying financial asset, at a certain price and date (Heston, 1993). From the above, the valuation of the options is of the utmost importance in order to compensate for the risk derived from unexpected price changes in the financial markets. Especially, investors can incur considerable financial losses due to fluctuations in currency prices, since the value of an option is affected by the performance of its underlying, so it is crucial to study the dynamics of the prices of the considered security.

Consequently, in many financial markets, such as equity and interest rates, the so-called volatility smile appears as an important characteristic of price models (Corrado and Su, 1997). Since, it is the reflection of the non-constant behavior in market volatilities for options at different exercise prices with a single expiration date. It is well known that the classic Black-Scholes framework cannot reproduce the smile of volatility observed in the market, due to the constant assumed volatility (Hull, 2012). That is why Cuesta (S.f) points out that stochastic volatility models are an important advance in financial research to avoid this inconvenience. Among these more sophisticated models, the Heston model has become one of the most used by professionals. Its importance for this study lies in obtaining a closed solution for the price of a European purchase option in an asset with stochastic volatility. In addition, it is highly efficient due to its easy implementation. This is why, for the present degree work, it focuses on the dynamics of the Heston model and the characterization of the calibration for ibex 35 options, which describes the volatility of the asset as a stochastic process. These options are plain vanilla derivatives, which are one of the main products traded on derivatives exchanges. In particular, the European option IBEX 35 is studied with the objective of presenting the Heston model, emphasizing the calibration and evaluation of said model. For the above, it is based on the data collected from the daily MEFF newsletter. Similarly, a methodology will be studied to calibrate and evaluate the parameters of the Heston model based on implied market volatilities.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Jurado: MAURO MONTEALEGRE CARDENAS

Firma: Mauro Montealegre

Nombre Jurado: JAIME POLANIA PERDOMO

Firma:

DINÁMICA DEL MODELO DE HESTON Y LA CARACTERIZACIÓN DE LA CALIBRACIÓN PARA OPCIONES IBEX 35

Jessica Alexandra Santanilla García
Jess920511@gmail.com
Fernando Fierro Gonzalez
fernandofierro_1994@outlook.com

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
MATEMÁTICA APLICADA

Neiva - Huila
Colombia
2019

DINÁMICA DEL MODELO DE HESTON Y LA CARACTERIZACIÓN PARA OPCIONES IBEX 35

Jessica Alexandra Santanilla García
Fernando Fierro Gonzalez

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Matemático

Director:
Yineth Medina Arce
(Magíster en Matemática)

Universidad Surcolombiana
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Matemática Aplicada
Neiva - Huila
Colombia
2019

A Dios por su infinita bondad y amor, Por darnos fuerza para continuar, por ser el inspirador en este proceso para lograr nuestros objetivos.

A nuestros padres por su amor, trabajo , paciencia y sacrificio en todos estos años, gracias a ustedes por inculcar en nosotros el ejemplo de esfuerzo y valentía, esto nos ha permitido y enseñado a no temer las adversidades y así llegar a cumplir hoy un sueño más.

A nuestros hermanos por estar siempre presentes, acompañándonos y por el apoyo moral, que nos brindaron a lo largo de esta etapa de nuestras vidas. A toda nuestra familia por sus oraciones, consejos y palabras de aliento.

A todas las personas que nos han apoyado y han hecho que el trabajo se realice con éxito en especial a aquellos que nos abrieron las puertas y compartieron sus conocimientos.

.

Agradecimientos

A ti Dios por bendecir nuestras vidas, por guiarnos, por ser el apoyo y fortaleza en aquellos momentos de dificultad y de debilidad.

A nuestros padres, por ser los principales promotores de nuestros sueños, por los consejos, por su ejemplo de lucha y honestidad, por confiar y creer en nuestras capacidades; a nuestros hermanos por su tenacidad y apoyo.

Agradecemos a nuestros docentes por haber compartido sus conocimientos y experiencia a lo largo de nuestra preparación profesional, Debo agradecer de manera especial a la Mg. Yineth Medina, por su paciencia, disponibilidad, Su apoyo, confianza y por aceptar realizar este trabajo de grado bajo su dirección.

Glosario

TÉRMINOS, CONCEPTOS Y DEFINICIONES

A lo largo del proyecto es necesario tener en claro algunos conceptos básicos que permitirán facilitar el desarrollo del mismo.

Activo subyacente: Bien o índice de, objeto de un contrato futuro o de un contrato de opción, concertado en la bolsa de derivados. Los precios de los productos derivados son una función de los precios del valor de referencia. Estos pueden ser: acciones, un índice o una caminata aleatoria. .

At the money : Cuando el valor del subyacente coincide con el precio de ejercicio, se dice que la opción se encuentra "en el dinero" (At The Money).

Contrato de opción : Contrato estandarizado, en el cual el comprador, mediante el pago de una prima, adquiere del vendedor el derecho, pero no la obligación de comprar o vender un activo subyacente a un precio pactado en una fecha futura, y el vendedor se obliga a vender o comprar, según corresponda, el activo subyacente al precio convenido. El comprador puede ejercer dicho derecho, según se haya acordado en el contrato respectivo. Si el contrato de opción se pacta el pago por diferencias, no se realizará la entrega del activo subyacente.

Bolsa: Con este nombre se designa al mercado financiero en donde se compran y venden acciones, obligaciones, bonos y otros activos financieros. En la Bolsa las transacciones se realizan a través de intermediarios financieros que reciben el nombre de brokers. También se la conoce como Bolsa de Valores o Bolsa de Comercio.

Cierre: Término de una sesión bursátil, de acuerdo con los horarios oficiales. Registro de las operaciones realizadas y del nivel alcanzado por las cotizaciones de los títulos operados durante una sesión.

Cobertura de Riesgos (Hedging) :La cobertura de los riesgos financieros a través de los productos derivados es similar a la adquisición de un seguro; proporciona protección contra los efectos adversos de las variables sobre las cuales no tienen control los agentes participantes en la actividad económica.

Contrato de Opción : Contrato estandarizado, en el cual el comprador, mediante el pago de una prima, adquiere del vendedor el derecho, pero no la obligación de comprar o vender un activo subyacente a un precio pactado en una fecha futura, y el vendedor se obliga a vender o comprar, según corresponda, el activo subyacente al precio convenido. El comprador puede ejercer dicho derecho, según se haya acordado en el contrato respectivo. Si en el contrato de opción se pacta el pago por diferencias, no se realizará la entrega del activo subyacente.

Contrato de Opción Call: Opción de compra que da a su comprador –tenedor de la opción- el derecho, pero no la obligación, de comprar algún activo subyacente, en una fecha predeterminada, y a un cierto precio preestablecido..

Contrato de Opción Put: : Opción de venta que da a su comprador –tenedor de la opción- el derecho, pero no la obligación, de vender algún activo subyacente, en una fecha predeterminada, y a un cierto precio preestablecido.

Correlación : Debido a la dificultad para interpretar la magnitud de la covarianza, suele utilizarse la correlación para medir el grado de movimiento conjunto entre dos variables o la relación lineal entre ambas. La correlación se encuentra entre -1 y 1.

Covarianza: Es una medida de relación lineal entre dos variables aleatorias describiendo el movimiento conjunto entre éstas.

Delta : La delta es el índice que mide la variación del valor de la prima de la opción ante variaciones en el precio del activo subyacente. Matemáticamente es la primera derivada de la prima con respecto al subyacente.

Derivados : Familia o conjunto de instrumentos financieros, implementados a partir de 1972, cuya principal característica es que están vinculados a un valor subyacente o de referencia (títulos representativos de capital o de deuda, índices, tasas, y otros instrumentos financieros). Los productos derivados surgieron como instrumentos de cobertura ante fluctuaciones de precio en productos agroindustriales (commodities), en condiciones de elevada volatilidad. Los principales derivados financieros son: futuros, opciones sobre futuros, warrants y swaps.

Derivados Plain Vanilla :Instrumentos financieros derivados más simples o denominados de primera generación ("plain vanilla"). Por ejemplo: Forwards, Futuros, Swaps, Opciones. Desviación standard o Desviación típica: Medida estadística de la variabilidad de una magnitud. Es igual a la raíz cuadrada de la varianza.

Gamma : Debido a que la delta de la opción cambia continuamente como consecuencia de los cambios en el valor del subyacente, es importante medir estos cambios. La gamma se define como la medida de cambio de la delta ante cambios en el subyacente. También se conoce como la segunda derivada del valor de la opción con respecto al valor del subyacente.

Homocedasticidad : Es una característica de un modelo de regresión lineal que implica que la varianza de los errores es constante a lo largo del tiempo.

In the Money : Cuando el valor intrínseco de una opción es positivo, se dice que la opción se encuentra "dentro del dinero" (In the Money).

Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) : Indicador de la evolución del mercado accionario en su conjunto. Se calcula en función de las variaciones de precios de una selección de acciones, llamada muestra, balanceada, ponderada y representativa de todas las acciones cotizadas en la BMV.

Opción de Compra : Es un contrato que proporciona a su poseedor (el comprador) el derecho (no la obligación) a comprar una cantidad de activos, a un precio establecido, en una fecha determinada (opción europea) o en cualquier momento anterior a dicha fecha (opción americana).

Opción europea : El tenedor de la opción las puede ejercer hasta la fecha de vencimiento. Out of the Money: Cuando el valor intrínseco de una opción es negativo, se dice que la opción se encuentra "fuera del dinero" (Out of The Money).

Paridad Put –Call : La paridad call-put describe la relación entre el precio de una opción tipo Call Europea y el precio de una opción tipo Put Europea, cuando ambas tienen el mismo precio de ejercicio y misma fecha de vencimiento.

Rho :La "rho" es la variación del precio de la opción ante cambios en la tasa de interés libre de riesgo.

Subyacente : Bien o índice de referencia, objeto de un Contrato de Futuro o de un Contrato de Opción, concertado en la Bolsa de Derivados. Los precios de los productos derivados son una función de los precios del valor de referencia. Estos pueden ser: títulos representativos de capital o deuda, índices, tasas y otros instrumentos financieros. También se denomina valor de referencia.

Theta : La "theta" es la sensibilidad del precio de la opción ante el paso del tiempo, es decir, es el cambio esperado en el valor teórico de la opción ante una variación de un día en el tiempo pendiente hasta el vencimiento.

Valor Intrínseco de una opción : El valor intrínseco de una opción es el máximo entre el monto por el cual la opción está en el dinero y cero. Vega: La "vega" es la variación del precio de la opción ante cambios en la volatilidad del subyacente.

Volatilidad : Grado de fluctuación que manifiesta el precio del subyacente a través del tiempo.

Volatilidad Implícita : Esta volatilidad no se basa en considerar observaciones históricas sino en observar la volatilidad existente en el mercado de opciones. La manera de calcularla es observando el precio de la prima de las opciones en el mercado y sustituyendo este valor en la fórmula de Black-Scholes. Una vez hecha la sustitución se despeja el valor de la volatilidad de dicha fórmula. La volatilidad implícita es muy confiable cuando el mercado de opciones del subyacente tiene suficiente liquidez. Sin embargo en la práctica se enfrenta el problema de que no todos los subyacentes tienen contratos de opciones, por tanto solo para algunos casos se puede calcular la volatilidad implícita.

Conceptos Basicos

Los derivados son un instrumento financiero muy interesante desde el punto de vista matemático y representa un contrato o un valor que depende del subyacente, como una acción, un bono, un índice, una mercancía o incluso otro derivado. La cadena de derivados así creada puede ser muy complicada. Estos instrumentos se negocian en muchos mercados financieros y su uso es principalmente para arbitraje, especulación y cobertura. Las opciones son también instrumentos derivados que otorgan al titular el derecho, pero no la obligación, de comprar (Call) o vender (Put) en una fecha determinada (llamada fecha de ejercicio) el subyacente a un precio determinado, denominado precio de ejercicio. Normalmente, cuando no se agregan restricciones adicionales, las opciones de call y Put se definen como opciones europeas.

Si el titular tiene derecho a ejercer la opción en cualquier fecha entre la firma del contrato y su vencimiento, la opción se conoce como la opción estadounidense. Estas últimas, junto con la familia de opciones europeas, constituyen las opciones estándar conocidas como vanilla natural. Sin embargo, existen otras opciones que pueden complicarse al requerir características en el desempeño del subyacente u ofrecer derechos adicionales al titular. Algunos ejemplos son: opciones asiáticas, opciones exóticas, opciones de lookback, etc. De todo lo anterior, se deduce que las opciones pueden usarse para realizar apuestas alcistas o bajistas en una acción subyacente. Sin embargo, existen varias razones convincentes para agregar opciones de acciones a su cartera, incluso si no está intentando apuntar un movimiento direccional sensible al tiempo en las acciones. Si bien hay muchos usos diferentes de las opciones sobre acciones, la mayoría de los comerciantes persiguen uno de estos tres objetivos:

- Especulación:
Las opciones de acciones pueden utilizarse para especular sobre la dirección futura del precio de las acciones subyacentes. Los operadores que predicen una acción positiva del precio pueden querer comprar call o diferenciales de call largas, mientras que los diferenciales de colocación y colocación pueden utilizarse para capitalizar la caída esperada de una acción.

- La cobertura:
Debido a su clasificación como derivados, las opciones ocasionalmente obtienen una mala reputación como vehículos de inversión "arriesgado" Sin embargo, las opciones son en realidad una herramienta crucial para proteger una cartera de acciones contra los altibajos en el mercado.

- Generando ingresos:
Durante los períodos de acción de precios relativamente tranquilos, las opciones ofrecen una serie de formas de aumentar su rentabilidad con estrategias de cobro de primas. Quizás el más conocido de estos sea la estrategia de llamada cubierta, en la que un inversionista vende opciones de compra contra una acción en su cartera. La venta de la call se traduce en un crédito inmediato, lo que permite al comerciante beneficiarse de un capital por lo demás sin vida.

Es importante recordar que en los contratos de opciones hay dos partes:

Comprador o posición larga (Long): Es el que posee el derecho de ejercer la compra o la venta del activo subyacente (bono, acciones, materia prima, etc).

Vendedor o posición corta (Short): Es el que está obligado a comprar o vender el activo subyacente al precio pactado, si el comprador ejercita su derecho.

De lo anterior, cada uno puede operar con dos tipos de contratos de opciones:

- Opción de Compra (Call): Otorga el derecho al comprador de la opción, de comprar el activo subyacente (y el vendedor de la opción está obligado a comprarlo), al precio que indique la opción, en la fecha fijada o antes (Europeas o Americanas).
- Opción de Venta (Put): Concede el derecho al comprador de la opción, de vender el ac-tivo subyacente (y el vendedor de la opción está obligado a comprarlo), al precio que indique la opción, en la fecha fijada o antes.

Siguiendo este orden de ideas, a partir de los dos contratos de opciones se generan cuatro distintos escenarios como se muestran en la figura 1. Esto es:

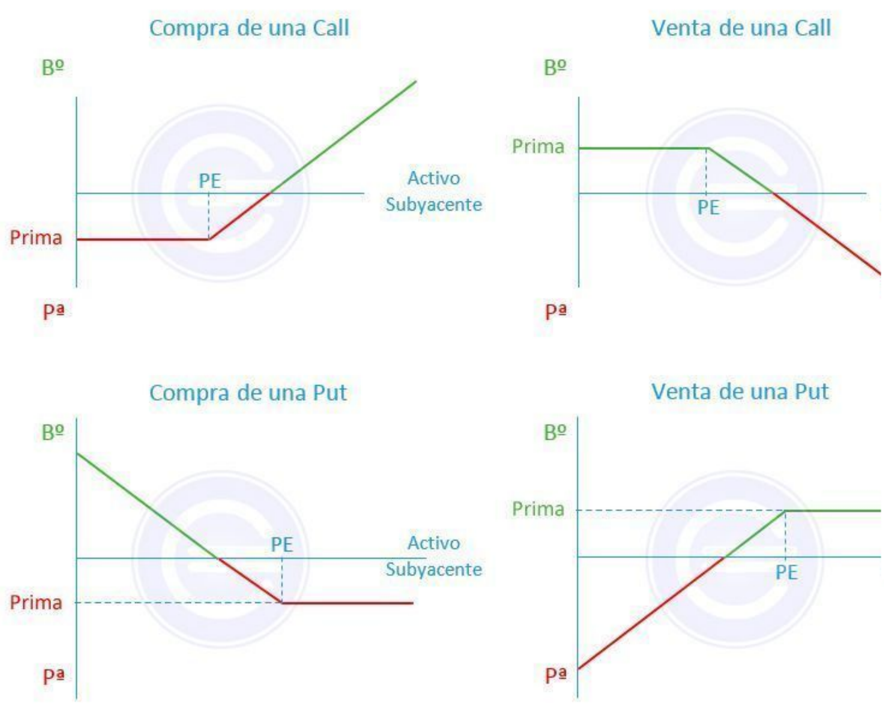


Figura 1: Beneficio o perdida frente a la variación del precio del Activo Subyacente.
Fuente: Tomado de https://economipedia.com/definiciones/opciones-financieras-tipos-y-ejemplo.html

De la imagen anterior, es claro que lo que se negocia en el mercado de las opciones es la Prima, ya que, esta es la cantidad de dinero que el comprador de una Opción paga por adquirir el derecho de compra (Call) o de venta (Put). A su vez, esta misma cantidad de dinero (Prima) es la que recibe el vendedor de la Opción, obligándole a, en caso de ejercicio, vender (en el caso de una Opción Call) o comprar (para una Opción Put) el activo subyacente al precio fijado (Precio de Ejercicio).

Resumen

Las finanzas permiten a los países hacer un uso completo de los activos de manera eficiente para mejorar la calidad de vida promedio de toda la sociedad. Muchas personas tienen la necesidad de comprar uno o más tipos de servicios ofrecidos por entidades financieras, como empresas de gestión de activos y bancos. Dichos bancos se enfocan en recaudar billones de dólares de diferentes fuentes. Sin embargo, el mundo financiero está lleno de riesgos, tanto así, que uno de los problemas principales para las entidades financieras es, cómo administrar de manera segura la enorme cantidad de dinero que poseen, y los medios para solucionar dichos problemas son los derivados financieros, que pueden ser considerados como el seguro para las estrategias de inversión. Particularmente, uno de los derivados más utilizados son las opciones, las cuales, son contratos financieros que otorgan al comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender, una cantidad determinada de un activo financiero subyacente, a un precio y fecha determinada. De lo anterior, la valoración de las opciones es de suma Importancia para poder compensar el riesgo derivado de los cambios inesperados de los precios en los mercados financieros. Especialmente, los inversionistas pueden incurrir en pérdidas financieras considerables debido a las fluctuaciones en los precios de las divisas, dado que el valor de una opción se ve afectado por el desempeño de su subyacente, por eso es crucial estudiar la dinámica de los precios de la seguridad considerada.

En consecuencia de lo anterior, en muchos mercados financieros, como la renta variable y la tasa de interés, la llamada sonrisa de volatilidad aparece como una característica importante de los modelos de precios [5], ya que es el reflejo del comportamiento no constante en las volatilidades del mercado para opciones a diferentes precios de ejercicio con una sola fecha de vencimiento. Es bien sabido que el marco clásico [3] no puede reproducir la sonrisa de volatilidad observada en el mercado, debido a la constante volatilidad asumida [16]. Es por esto que [7], señala que Los modelos de volatilidad estocástica son un avance importante en la investigación financiera para evitar este inconveniente. Entre estos modelos más sofisticados, el modelo Heston (1993) se ha convertido en uno de los más utilizados por los profesionales. Su importancia para este estudio radica en la obtención de una solución de forma cerrada por el precio de una opción de compra europea en un activo con volatilidad estocástica. Además, es altamente eficiente debido a su fácil implementación.Es por esto, que para el presente trabajo de grado se centra en la dinámica del modelo de Heston y la caracterización de la calibración para opciones IBEX35, que describe la volatilidad del activo como un proceso estocástico.

Dichas opciones son los derivados plain vanilla, que son uno de los principales productos negociados en las bolsas de derivados. En particular se estudia la opción europea IBEX 35 con el objetivo de presentar el modelo de Heston (1993), enfatizando en la calibración y evaluación de dicho modelo. Para lo anterior, se parte de los datos recogidos del boletín diario del MEFF. La metodología para calibrar y evaluar los parámetros del modelo Heston (1993) está basada en las volatilidades implícitas del mercado.

Palabras clave: Calibración, volatilidad, derivados financieros, modelo de Heston, IBEX 35.

Abstract

Finances allow countries to make full use of assets efficiently to improve the average quality of life of the entire society. Many people have the need to buy one or more types of services offered by financial entities, such as asset management companies and banks. These banks focus on raising billions of dollars from different sources. However, the financial world is full of risks, so much so, that one of the main problems for financial institutions is, how to safely manage the huge amount of money they have, and the means to solve these problems are financial derivatives , which can be considered as insurance for investment strategies. Particularly, one of the most used derivatives are the options, which are financial contracts that grant the buyer the right, but not the obligation, to buy or sell, a certain amount of an underlying financial asset, at a certain price and date (Heston, 1993). From the above, the valuation of the options is of the utmost importance in order to compensate for the risk derived from unexpected price changes in the financial markets. Especially, investors can incur considerable financial losses due to fluctuations in currency prices, since the value of an option is affected by the performance of its underlying, so it is crucial to study the dynamics of the prices of the considered security.

Consequently, in many financial markets, such as equity and interest rates, the so-called volatility smile appears as an important characteristic of price models [5]. Since, it is the reflection of the non-constant behavior in market volatilities for options at different exercise prices with a single expiration date. It is well known that the classic [3] framework cannot reproduce the smile of volatility observed in the market, due to the constant assumed volatility [17]. That is why [7] points out that stochastic volatility models are an important advance in financial research to avoid this inconvenience. Among these more sophisticated models, the Heston model has become one of the most used by professionals. Its importance for this study lies in obtaining a closed solution for the price of a European purchase option in an asset with stochastic volatility. In addition, it is highly efficient due to its easy implementation. This is why, for the present degree work, it focuses on the dynamics of the Heston model and the characterization of the calibration for ibex 35 options, which describes the volatility of the asset as a stochastic process. These options are plain vanilla derivatives, which are one of the main products traded on derivatives exchanges. In particular, the European option IBEX 35 is studied with the objective of presenting the Heston model, emphasizing the calibration and evaluation of said model. For the above, it is based on the data collected from the daily MEFF newsletter. Similarly, a methodology will be studied to calibrate and evaluate the parameters of the Heston model based on implied market volatilities.

Key words: Calibration, volatility, financial derivatives, Heston model, IBEX 35.

Índice general

Agradecimientos **II**

Glosario **III**

Resumen **XII**

1. Introducción **1**

2. Planteamiento del Problema **3**

3. Objetivos **8**
3.1. Objetivo General 8
3.2. Objetivos Específicos 8

4. Justificación **9**

5. Marco Teórico **11**
5.1. Estado del arte 11
5.2. Fundamentos del cálculo estocástico 15
5.2.1. Espacios de probabilidad 15
5.2.2. Variable Aleatoria 17
5.2.3. Procesos estocásticos y movimientos brownianos . . 18
5.2.4. Movimiento browniano 18
5.3. Modelo de Heston 20
5.3.1. Solución de forma cerrada del modelo de Heston . . 24
5.3.2. Función característica de Heston 25
5.4. Simulación de Monte Carlo 25

6. Metodología Propuesta **27**

6.1. Procedimiento de calibración en el modelo de Heston . . . 27
6.2. Confiabilidad 28

7. Resultados **30**
7.1. Sonrisa de Volatilidad. 30
7.1.1. Razón de la volatilidad sesgada. 32
7.2. Superficie de Volatilidad. 33
7.3. Calibración 36
7.4. Evaluación de la opción europea IBEX 35 39

8. Conclusiones y Recomendaciones **42**
8.1. Conclusiones 42
8.2. Recomendaciones 46

BIBLIOGRAFÍA **48**

ANEXOS **53**

Índice de figuras

1. Beneficio o perdida frente a la variación del precio del Activo Subyacente. Fuente: Tomado de https://economipedia.com/definiciones/opciones-financieras-tipos-y-ejemplo.html X

2.1. Sonrisa de volatilidad. Fuente: Tomado de https://www.investopedia.com/terms/v/volatilitysmile.asp . . . 4

5.1. El proceso de Wiener. 19

7.1. Código RSTUDIO para la sonrisa de volatilidad. Fuente: Autoría Propia 31
7.2. Sonrisa de volatilidad para el IBEX 35. Fuente: Autoría propia 31
7.3. Superficie de volatilidad del IBEX 35 en RSTUDIO Fuente: Autoría propia 34
7.4. Superficie volatilidad IBEX 35. Fuente: Autoría Propia . . 35
7.5. Superficie de volatilidad sin arbitraje para la opción Ibex 35 Fuente: Autoría propia 36
7.6. captura del código rodando. 37
7.7. Calibración del modelo de Heston con datos del 08/04/2019 - 31/05/2019 37
7.8. Calibración del modelo de Heston con datos de agosto 2007 Fuente: Crespo y Marabel (2010) 38
7.9. Evaluación por Monte Carlo del IBEX 35 en RSTUDIO Fuente: Autoría Propia 40
7.10. Evaluación del precio de una call calculada usando el método de Monte Carlo y la “fórmula cerrada de Heston” Fuente: Autoría Propia 40

7.11. Comparación de precios del MEFF y los precios usando el método de Monte Carlo y la "fórmula cerrada de Heston". 41

Capítulo 1

Introducción

El modelo de volatilidad estocástica es un campo de análisis de econometría, y es un modelo en el que la volatilidad (fluctuación secundaria) varía según el tiempo. En 1993, Stephen Heston propuso un modelo estocástico de volatilidad del sistema de inducción y construyó un modelo matemático que describía el cambio de volatilidad del activo subyacente. En finanzas matemáticas, es un modelo utilizado para evaluar derivados, como opciones y valores, y es relevante porque trata la volatilidad de los valores subyacentes como un proceso estocástico, dándole a este modelo una mejor consideración del mercado real y complementa la ecuación de Black-Scholes (1973) que supone la volatilidad constante y no se ve afectada por las fluctuaciones en el tiempo o los precios de los activos subyacentes, es decir, considera que la evolución del subyacente sigue un MBG (Movimiento geométrico browniano) en el que el coeficiente de difusión es constante. Sin embargo, este modelo no puede explicar la sonrisa de volatilidad y el sesgo de volatilidad que sugieren que la volatilidad implícita varía según el precio de ejercicio y la fecha de ejercicio de la opción. En el modelo de Heston (1993) se tiene en cuenta la hipótesis razonable sobre el mercado, el principio de no arbitraje, es decir, que el dinero no puede crearse de la nada sin correr un riesgo. El principio establece el término que se deriva del proceso estocástico que representa los precios. Se dice que el modelo considerado evoluciona bajo la medida Q y que los precios del mercado siguen la medida P. Luego, el objetivo de la opción de fijación de precios y la oferta de los precios de las opciones bajo la medida Q que están en total coherencia con el principio, es decir, no dan oportunidades de arbitraje en el mercado. Si bien el propósito de la calibración es encontrar los parámetros del modelo considerado bajo la medida Q que mejor se aproxima a los precios observados en la medida P, es decir, observamos la evolución del mercado e intentamos extraer la información que causó esta evolución. Para ambos problemas es fundamental que los precios estén de acuerdo con el mercado. Cabe señalar que la calibración está dentro del alcance de la optimización, ya que queremos estimar los parámetros que minimizan la distancia entre los precios. Su complejidad está determinada por la naturaleza del problema.

El presente trabajo está estructurado y dividido en 8 capítulos: En el primer capítulo, se hace una introducción de las opciones para tener claros los conceptos básicos y también se aprovecha para explicar los datos utilizados.En el segundo capitulo se presenta el problema de investigación.En el tercer y cuarto capitulo se presenta la justificación y objetivos (general y específicos) de la investigación. El quinto capítulo contiene los referentes teóricos que sustentan el desarrollo del presente trabajo y son las bases o principios para inferir sobre la problemática presentada, en esta fase, se enuncia la importancia y el porqué del estudio del objeto. El sexto capítulo está compuesto por una metodología cuantitativa, en esta fase se describe y explica las fuentes e instrumentos de recolección datos, finalmente se presenta el análisis de datos. El capítulo séptimo, expone los resultados del estudio a partir de los análisis y confrontación en el desarrollo de la investigación, teniendo así un gran aporte para la calibración del modelo de Heston (1993). El capítulo octavo, se presentan las conclusiones obtenidas a partir del análisis y posteriormente se realizan unas recomendaciones para posibles investigaciones que se pueden formular a partir de los resultados obtenidos.

Capítulo 2

Planteamiento del Problema

La volatilidad en el precio de las opciones, es un factor significativo en la valoración de los derivados y la gestión del riesgo. Dicha volatilidad refleja la incertidumbre en los mercados financieros y surge únicamente de las acciones de los participantes del mercado. En consecuencia, las expectativas del mercado tienen el objetivo de lograr una relación óptima entre el rendimiento viable y el riesgo viable de su estrategia. Es decir, el punto crítico de los inversionistas es la cuantificación del riesgo. Para lograr identificar las razones riesgo, se requieren suposiciones fundamentales sobre cómo evolucionan los precios del mercado en el tiempo, para esto el modelo estándar para valuar opciones, es el propuesto por [3], el cual se basa en gran medida por hipótesis de variación de precios normalmente distribuidos y una volatilidad constante a lo largo del tiempo de la opción. Este modelo tuvo eficacia hasta antes del crash de 1987, debido que en esa fecha la volatilidad no dependía de los precios de ejercicio (strike) o del vencimiento. Sin embargo, a partir de 1987 se empezó a observar que la volatilidad de una opción cambiaba en función del strike y el vencimiento. Lo anterior, contradecía el supuesto fundamental del modelo de Black y Scholes (1973), donde suponía que la volatilidad siempre era constante.Posteriormente, se evidenció que esta suposición era solo una aproximación insuficiente a los eventos reales del mercado. Lo mencionado anteriormente, está sustentado por autores como: [15] quien asevera que, la volatilidad constante no es consistente. Del mismo modo,[30] afirma que, el suponer la volatilidad constante es ir en contra vía del mercado real de opciones. Esto, está fuertemente relacionado con lo propuesto por [28] y [8], quienes afirma que en el mercado real, suponer una volatilidad constante implica tener sesgos conocidos. En consecuencia de lo anterior se hace evidente la problemática que surge al momento de evaluar las opciones, puesto que el modelo de Black y Scholes (1973) que es considerado como la piedra angular en la evaluación de opciones, tiene un efecto inválido en el mercado real. Así mismo, su principal desventaja es usar suposiciones poco realistas como la homocedasticidad, los retornos normales, y además, no es utilizable para las opciones estadounidenses. Por otro lado, Otro problema que [3] no aborda es el de la sonrisa de volatilidad: si la volatilidad es constante para un índice bursátil determinado, numerosas opciones diferentes, cada una con precios de ejercicio diferentes, deberían tener la misma volatilidad asumida. Si consideramos los precios de las opciones observadas en el mercado de diferentes ataques como insumos, utilizando la fórmula Black-Scholes (1973) podemos resolver la volatilidad desconocida del mercado, llamada volatilidad implícita. En teoría, la volatilidad implícita debería ser constante para diferentes opciones con diferentes precios de ejercicio que tienen el mismo activo subyacente. Sin embargo, si graficamos el precio de ejercicio (Strike Price) como la variable independiente y la volatilidad implícita (Implied volatility) como la variable dependiente en R^2, lo visual se asemeja a una curva sonriente, en lugar de una línea horizontal (Ver figura 2.1).

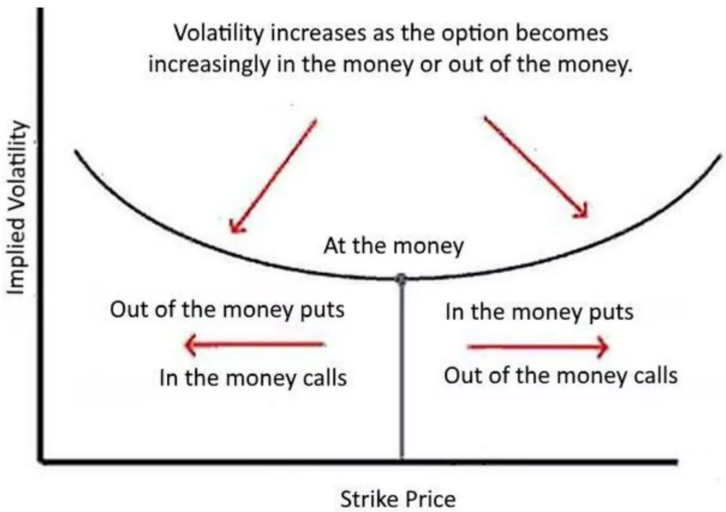


Figura 2.1: Sonrisa de volatilidad. Fuente: Tomado de https://www.investopedia.com/terms/v/volatilitysmile.asp

De lo mencionado anteriormente, es de resaltar que el alcance y el tamaño de los mercados de derivados han crecido de manera aparentemente exponencial en los últimos 15 a 25 años. Esto ha impulsado el deseo de ir más allá del enfoque de fijación de precios estándar de Black-Scholes (1973) para modelar con mayor precisión los movimientos de precios de los activos subyacentes de un derivado dado y para modelar con mayor precisión otros factores críticos como la tasa de interés futura. Hay que mencionar además, que al considerar datos financieros reales, como los índices bursátiles, se observan períodos de agrupamiento de volatilidad en los que la volatilidad es notablemente alta o baja, seguido por períodos con comportamiento opuesto [7]. Así mismo, en un mercado real, cuando los precios de las acciones disminuyen, la volatilidad tiende a aumentar. El modelo de Heston (1993) explica este comportamiento al tratar Ω como una variable e incorporando un término de correlación. Además, explica el fenómeno de la sonrisa de volatilidad suponiendo que la volatilidad sigue un proceso aleatorio correlacionado negativamente con la evolución del precio de los activos según lo indicado por los datos del mercado. De esta manera, el modelo Heston (1993) surge como uno de los primeros modelos que permite una calibración de datos reales del mercado utilizando la solución de forma semianalítica para los precios de opciones europeas simples, las llamadas vanilla. Es decir, El modelo Heston (1993) es un método de opción que tiene en cuenta los cambios en la volatilidad que se observan entre las diferentes opciones negociadas en un momento dado para el mismo activo.Sin embargo, todavía existen dificultades para estimar los parámetros del modelo de Heston (1993). Dado que no hay una función de probabilidad de transición conjunta cerrada del proceso de difusión bidimensional, y el método de estimación de máxima verosimilitud (MLE) es difícil de implementar. La dificultad de estos modelos, es que el modelado más realista de la varianza puede ser compensado por los costos de calibración e implementación debido al hecho de que las fórmulas de forma cerrada rara vez están disponibles. En pocas palabras, La calibración del modelo es un proceso decisivo, y optar por un modelo más complejo implica una mayor complejidad del proceso de calibración.Conviene subrayar, que determinar los parámetros del modelo para que coincidan con los precios de mercado de un conjunto de opciones es lo que comúnmente se conoce como problema de calibración del modelo. De hecho, es el problema inverso al problema de fijación de precios de opciones. Sin embargo, el precio a pagar por un modelo más realista, como el modelo Heston (1993), se traduce en una mayor complejidad para la calibración del modelo.Lo anterior está sustentado por [18] , quienes afirman que el método de calibración se vuelve tan crucial como el propio modelo. En efecto, para calcular los precios de las opciones utilizando el modelo de Heston (1993), se necesitan parámetros de entrada que no son observables en los datos del mercado, esto implica que, no es posible utilizar estimaciones empíricas. En realidad, el enfoque estándar de la industria es minimizar la diferencia entre los precios observados y los precios del modelo, es por esto que los modelos de volatilidad estocástica están ganando popularidad en la fijación de precios y cobertura de derivados financieros; sin embargo, debido a su complejidad analítica, algunas opciones exóticas (por ejemplo, opciones dependientes de la ruta) no poseen fórmulas de fijación de precios de forma cerrada, y algunos métodos numéricos como la diferencia finita y el método de celosía se vuelven tediosos o inestables en este tipo de modelos debido a su multidimensionalidad [21].

Existe una gran cantidad de literatura relacionada con la calibración del modelo de Heston (1993) para fijar precios de derivados financieros bajo volatilidad estocástica, muchos de los cuales se basan en algoritmos computacionalmente costosos que al fin y al cabo, no caracterizan y profundizan el conocimiento sobre la calibración. Según [2] la caracterización es un tipo de descripción cualitativa que puede recurrir a datos cuantitativos con el fin de profundizar el conocimiento acerca de algo y a partir de ellos, describir una forma estructurada y sistematizarlos de forma crítica. Para poder calibrar el modelo Heston (1993), se estudian las opciones europeas, porque generalmente se negocian con un descuento para sus contrapartes estadounidenses, ya que solo existe una oportunidad única para ejercer la opción . Si el titular de la opción europea no quiere esperar hasta la fecha de vencimiento, debe cerrar su posición vendiendo la opción. Estas opciones se negocian principalmente en el mostrador y rara vez se ven en las principales bolsas. En particular, el Mercado Oficial de Opciones y Futuros Financieros en España (MEFF) es un mercado organizado regulado creado en 1989, que se caracteriza por ser muy ilíquido, con muy pocas operaciones diarias. Si nos centramos en los volúmenes de negociación de las opciones, vemos que las opciones del futuro MINI IBEX35 que es el subyacente del IBEX 35 apenas tienen unos pocos centenares de cruces al día, principalmente las operaciones se concentran en strikes ATM y con un vencimiento no superior a los tres meses. Considerando todo lo anterior, se desprende la siguiente pregunta de investigación:

Pregunta problema:

¿Cómo caracterizar de forma práctica la dinámica de calibración del modelo de Heston (1993) para la opción IBEX 35, que muestre un procedimiento basado en volatilidades implícitas del mercado?

Capítulo 3

Objetivos

3.1. Objetivo General

- Caracterizar e implementar el modelo de Heston (1993) para la opción IBEX35.

3.2. Objetivos Específicos

- Presentar y analizar la dinámica del modelo de Heston.
- calibrar el modelo de Heston utilizando volatilidades implícitas.
- Evaluar la opción IBEX35 mediante el método de Monte Carlo.

Capítulo 4

Justificación

El modelo de Black y Scholes (1973), fue el primer intento de descripción matemática de los mercados financieros. Es decir, [3] introdujeron una fórmula de fijación de precios para una acción subyacente siguiendo un movimiento browniano geométrico. Pero tenía un problema, dentro de sus supuestos, aseveraban que la volatilidad de las acciones subyacentes sería constante durante toda la vida de la opción. Este supuesto desde el punto de vista empírico, no es válido. Así mismo, según [28] afirma que la fórmula de Black y Scholes (1973) tiene sesgos conocidos para datos reales. A partir del problema anterior, [15] propuso un modelo estocástico de volatilidad en el que los movimientos brownianos podían correlacionarse con coeficientes de correlación instantáneos distintos de cero, es decir, considera una correlación entre el precio del activo y el proceso de volatilidad, permitiendo una calibración de datos reales del mercado utilizando la solución de forma semicerrada. Por otro lado, este modelo supone que la seguridad subyacente se deriva de un proceso de raíz cuadrada, el cual permite modelar el efecto de sonrisa (smile) observado en los precios de las opciones.

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede afirmar que los modelos de volatilidad estocástica desempeñan un papel muy importante en las finanzas, ya que pueden describir los movimientos de los factores de riesgo o activos subyacentes, que son los factores fundamentales en la valoración de derivados y la medición del riesgo. Así, el enfoque estándar de la industria financiera para el modelo de Heston (1993), es minimizar la diferencia entre los precios observados y los precios del modelo. En este orden de ideas, los precios del mercado se utilizan para calibrar un modelo de precios de opciones, que luego se puede usar para calcular los precios de opciones más complejas (exóticas) o para calcular los índices de cobertura. De este modo, según [15] afirma que, el proceso de inversión de la media de la raíz cuadrada garantiza la no negativa de las volatilidades.

Para el presente trabajo de grado, analizaremos el modelo de Heston, para identificar algunos comportamientos observados en el mercado de opciones. Ya que, este modelo permite derivar fácilmente un precio semi-analítico para las opciones europeas de plain vanilla. De lo anterior, la justificación del estudio el modelo de Heston (1993) en opciones europeas, radica en la caracterización de puntas altas (leptocurtosis) y colas gruesas, dejando claro que la distribución de probabilidad relacionada con los retornos logarítmicos de una actividad económica no es gaussiana, como lo planteó [3] en su modelo. Es decir, el supuesto de volatilidad constante en el precio del subyacente, resulta ser inadecuado puesto que los datos reflejan presencia de heterocedasticidad y curtosis, produciendo curvas de distribución leptocúrticas y de colas anchas.

Capítulo 5

Marco Teórico

Este apartado presenta a algunos estudios, investigaciones y eventos que tratan sobre los modelos de volatilidad estocástica, y posteriormente se hace un acercamiento sobre el enfoque y los conceptos teóricos fundamentales que sustentan la evaluación de opciones bajo volatilidad estocástica.

5.1. Estado del arte

De acuerdo con [16], el estado del arte es una investigación documental. Es una técnica que consiste en revisar qué se ha escrito y publicado sobre el tema o área de la investigación, de carácter científico, satisface procesos inductivos y deductivos enmarcados bajo principios epistemológicos y metodológicos [34]. Respecto a la revisión de escritos y publicaciones,[1] indican: en un estudio, ir tras las huellas de lo que se pretende investigar es una de las principales etapas que debe desarrollarse en toda investigación, etapa denominada estado del arte. Este apartado contiene una revisión de aquellos trabajos que por tener un objetivo a fin al interés de esta investigación, han servido como base de discusión para desarrollar una solución al problema a resolver. Las investigaciones encontradas están expuestas en orden cronológico; se comienzan con las experiencias internacionales y finalmente se expondrán las experiencias nacionales:

En la literatura internacional, se distinguen algunos estudios de España, como el articulo llamado “La volatilidad: modelización en la valoración de opciones y estimadores ” de [22] .Donde se hace una revisión extensa, tanto teórica como empírica, de las diferentes modelizaciones planteadas para la volatilidad, y en consecuencia de los diferentes modelos de valoración de opciones. También, se exponen y desarrollan diferentes estimadores propuestos para la predicción de la volatilidad futura, como por ejemplo, volatilidad implícita, modelos tipo ARCH y modelos de redes neuronales.

En el artículo titulado “Introducción a los modelos de volatilidad estocástica” de [29], se consideran dos series de rendimientos, la IBEX35, y la del tipo de cambio Libra/Dólar y concluyen que los rendimientos no tienen dependencia lineal con su propio pasado. Sin embargo, la agrupación de la volatilidad comentada anteriormente, aparece estadísticamente reflejada en las autocorrelaciones positivas de los rendimientos absolutos y de los rendimientos cuadrados.

En la tesis de maestría llamada “Introducción a los modelos de volatilidad estocástica” de [7]. En este trabajo se plantean las claves que llevan al estudio de los modelos de volatilidad estocástica, así como, el desarrollo de los mismos, su formulación y su aplicación para la valoración de opciones europeas.Muestra los resultados numéricos para modelos de volatilidad estocástica, y se da una ligera visión de los métodos de Monte Carlo más usados en la práctica para materializar computacionalmente los modelos de volatilidad estocástica (especialmente el modelo Heston que es el más usado en la valoración de opciones).

Finalmente, en el trabajo de maestría, el cual es llamado “Superficie de volatilidad e interpolación de opciones del Ibex no cotizadas” de [23]. se dibuja la superficie de volatilidad para las opciones del IBEX35 para estimar la prima de opciones no cotizada; como paso intermedio se calcula la sonrisa de volatilidad y se comprueba la paridad put-call. La volatilidad implícita para dibujar la sonrisa y la superficie de volatilidad se obtiene aplicando los métodos de Newton-Raphson, Secante y Bisección a una variante de fórmula de Black-Scholes, el modelo Black’76. Finalmente se valora una opción con un método de volatilidad estocástica como es el de Heston.

Entre los estudios más distinguidos de México esta el trabajo final de maestría "Valuación de opciones europeas con el modelo de volatilidad de Heston" de [8], que propone la función de pérdida como una metodología para estimar parámetros del modelo de Heston, que consiste en minimizar una medida de error dado por la diferencia entre precios de mercado y precios del modelo teórico. De lo anterior, el autor propone tres funciones de pérdida, de las cuales dos corresponden a precios y una está asociada con las volatilidades implícitas del mercado. Como un estudio posterior al ya mencionado, que implementa algunos conceptos y procedimientos sobre las funciones de pérdidas, es el artículo titulado "Valuación de opciones europeas sobre AMX-L, WALMEX-V y GMEXICO-B: Calibración de parámetros de volatilidad estocástica con funciones cuadráticas de pérdida" de [26]. Esta investigación propone una metodología para estimar los parámetros del modelo de volatilidad estocástica de Heston por medio de funciones cuadráticas de pérdida, las cuales minimizan el error entre precios de mercado y precios teóricos. Para ello se plantean tres clases de funciones de pérdida, de las cuales dos están asociadas a precios y otra a volatilidades implícitas. La metodología propuesta se aplica a un conjunto de precios de opciones sobre AMX-L, WALMEX-V y GMEXICO-B. Los resultados indican que para opciones de compra sobre AMX-L se generan volatilidades implícitas consistentes con las observadas con base en el criterio de la raíz de la pérdida del error cuadrático medio, mientras que para opciones de compra sobre WALMEX-V y GMEXICO-B se generan volatilidades implícitas consistentes con las observadas con base en el criterio de la raíz de la pérdida relativa del error cuadrático medio. Como un estudio alternativo acerca de los modelos de volatilidad estocástica, está el trabajo final de pregrado llamado "Valuación de opciones en el modelo de volatilidad estocástica de Heston: un nuevo método analítico de solución." De [27]. Este trabajo consistió en generalizar el método de Harper para resolver una EDP de segundo orden general de tipo parabólico y elíptico, de tal manera que permita aplicar dicho método a la EDP asociada al modelo de Heston.Por último y no menos importante, en la literatura estadounidense, está el trabajo de fin de master que está fuertemente relacionado con la presente línea de investigación. Dicho trabajo es titulado "Valuing a European Option with the Heston Model" de [40]. Este trabajo consistió en adoptar un modelo de volatilidad estocástica como el modelo de Heston, con el objetivo de valorar las opciones de compra europeas.

En la literatura Nacional (Colombia), se distinguen algunos estudios como: La tesis de maestría, titulada "Estudio numérico del modelo de Heston: método de diferencias finitas" de [33]. Estos autores describen las soluciones numéricas del modelo de Heston y proponen un esquema numérico alternativo en diferencias finitas explícito que sea positivo, monótono conservativo, estable, consistente y convergente, que permita resolver numéricamente el modelo de Heston a bajo costo computacional y de fácil implementación.

En la tesis de maestría llamada "Calibración del Modelo de Volatilidad Estocástica de Heston (El Caso de una Opción en Divisas)" de [12], el autor afirma que la calibración consiste en estimar los valores de los parámetros del modelo, de tal forma que los precios de las opciones deducidos de este, reproduzcan o aproximen los valores de las opciones observados en el mercado y corresponden a precios obtenidos por la especulación y las tendencias del mercado, permite presentar una calibración basada en la minimización de entropía relativa para luego compararla con estimación basada en el método de Tychonoff.Del mismo modo,en la tesis de maestría llamada "An accurate heston implementation with usd-cop data" de [19].Se encuentra, por evidencia empírica, una forma rápida y precisa de calcular el precio de una Llamada Europea utilizando el modelo de Heston. Calcula y utiliza un precio de referencia calculado con los enfoques de precios del modelo de Heston mencionados y la regla trapezoidal con $a = 1e - 20000$; $b = 300$; $N = 10000000$, para encontrar qué combinación de proceso de fijación de precios de Heston y esquemas numéricos conduce a un proceso de fijación de precios computacionalmente más rápido y preciso. Luego, calculan dos métodos de fijación de precios equivalentes y siete esquemas numéricos con el fin de encontrar qué combinación toma menos tiempo para convertirse en una computadora y se cierra lo más posible al punto de referencia. Eso significa que el estudio calcula dos conjuntos de parámetros. Uno bajo mesure Q y otro bajo P por la máxima verosimilitud y la función no lineal de mínimos cuadrados. En contraste con lo anterior y en vista de que la dinámica estocástica de los precios de las acciones en el modelo de Heston se describe comúnmente mediante un movimiento browniano geométrico (multiplicativo), que proporciona una función de distribución de probabilidad logarítmica normal para los cambios (retornos) del precio de las acciones. Se expondrán algunos fundamentos del cálculo estocástico como los espacios de probabilidad y la variable aleatoria, y como la probabilidad de los eventos financieros se encuentra directamente asociada con la recurrencia de los sucesos, permitiendo predecir que acontecimiento puede o no ocurrir dentro del rango de probabilidad definido $[0,1]$. De todo lo anterior, para abordar el problema de la calibración y evaluación, es esencial introducir los conceptos matemáticos y financieros sobre la base de modelos estocásticos. Esto es:

5.2. Fundamentos del cálculo estocástico

A continuación, se presentan los principios básicos de la teoría de la probabilidad que son útiles en los modelos estocásticos.

5.2.1. Espacios de probabilidad

Denotemos por Ω un conjunto no vacío, $\Omega \neq \phi$

Definición 1. A σ - algebra F es una familia de subconjuntos de Ω tal que:

i) $\phi \in F$

ii) si $f \in F$ entonces $F^c \in F$

iii) para cada secuencia $(F_n)_{n \in N}$ de elementos de F,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n \in F \tag{5.1}$$

Especialmente para aplicaciones financieras, es útil pensar en un σ -álgebra como un conjunto de información. Un elemento de σ -algebra F se denomina evento, por lo que σ -algebra F es una colección de eventos [9].

Ejemplo 1. El σ -álgebra de los borelianos $\mathfrak{B}$ ($\mathbb{R}^n$) es el σ -álgebra generado por Topología euclidiana de $\mathbb{R}^n$, es decir, $\mathbb{R}^n = \sigma$ $(A|A$ abierto en $\mathbb{R}^n$) [11].

Definición 2. Una medida en σ -álgebra F de Ω es una aplicación

$$P : F \to [0, +\infty]$$

tal que

i) $P(\phi) = 0$

ii) para cada sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de F, dos por dos inconexos, sostiene

$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} F_n\right) = \sum_{n\geq 1} P(F_n) \tag{5.2}$$

Si P (Ω) $< \infty$ decimos que P es una medida finita.Además, si vale la pena

iii) P $(\Omega) = 1$, entonces decimos que P es una medida de probabilidad.

Sea f ahora un subconjunto de Ω que pertenece a F, usamos el Siguiente interpretación:

$P(F) =$ ”La probabilidad de que ocurra el evento F ”.

En particular, si $P(F) = 1$ diremos que F ocurre con probabilidad 1 o Çasi seguro”, si $P(F) = 0$ diremos que el evento P es imposible [32].

Definición 3. Un espacio de probabilidad es una terna (Ω, F, P) donde:

i) Ω es un conjunto no vacío;

ii) F es un álgebra σ en Ω;

iii) P es una medida de probabilidad en F.

Observación. Desde el punto de vista financiero, los elementos de un espacio de probabilidades se pueden interpretar como:

Ω : representa todos los escenarios posibles que pueden ocurrir en el mercado, cada escenario $\varpi \in \Omega$: puede describirse como una evolución del precio en función del tiempo.

F_t : es la colección de eventos que refleja la información conocida hasta tiempo t. P: Es una medida de probabilidad que asigna cierta probabilidad a los eventos de un σ-algebra F [39] .

5.2.2. Variable Aleatoria

Definición 4. Una variable aleatoria en el espacio de probabilidad (Ω, F, P) es una función medible X de Ω a valores en $\mathbb{R}^n$, que es una función

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^n \; t.c.X^{-1}(H) \in F, H \in \mathfrak{B}$$

En el caso $n = 1$, X se llama la variable aleatoria real [31] .

Definición 5. Un proceso estocástico X es una colección de variables aleatorias

$$(X_t, t \in T) = (X_t(w), t \in T, w \in \Omega)$$

Definida para algún espacio Ω

Los procesos estocásticos pueden ser clasificados de acuerdo a la cardinalidad del conjunto T; si T es finito o infinito numerable diremos que se trata de un proceso estocástico a tiempo discreto, en caso contrario, si T es no numerable entonces será un proceso estocástico en tiempo continuo [24] .

5.2.3. Procesos estocásticos y movimientos brownianos

En lo siguiente (Ω , F, P) indica un espacio de probabilidad y un intervalo real del tipo

$$[0, T], o, [0, +\infty]$$

Definición 6. Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias.

$$X = \{X_t\}_{t \in I}$$

Definido con valores en $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{R}$) [39] .

5.2.4. Movimiento browniano

Un movimiento browniano nació como un modelo probabilístico del movimiento de una partícula en un fluido y consiste en un proceso estocástico definido en $[0, \infty)$ inicialmente nulo, con incrementos centrados en Gaussianos estacionarios independientes y trayectorias continuas.

Definición 7. . Sea (Ω , F, P) un espacio de probabilidad. El proceso estocástico real
$W = W_{t \geq 0}$ se llama movimiento browniano activado (Ω , F, P) si

- $W_0 = 0$
- la aplicación $t \to W_t$ es continua , es decir, existe $A \in F$ tal que $P(A) = 1$ y $A \subseteq \{w \in \omega | t \to W_t(w) escontinuo\}$

- Los incrementos de W_t son independientes, es decir, para cada $n \geq 1$ y $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n$, las variables aleatorias $\{W_{t_i} - Wt_{i-1}/i = 1, ..., n\}$ n independiente .

- para cada $0 \leq t < s$ los incrementos $W_s - W_t$ tienen la distribución Gaussiana con media 0 y varianza $s-t$, es decir,$W_s - W_t \sim N(0, s-t)$ [39]

Para ilustrar lo anterior, una rutina simple de Matlab demuestra la simulación simple del Movimiento Browniano con un tamaño de paso $\delta_t = 1/100$, la simulación se realiza utilizando la función incorporada de Matlab randn (Ver apéndice A) para representar una variable estocástica $N(0, 1)$

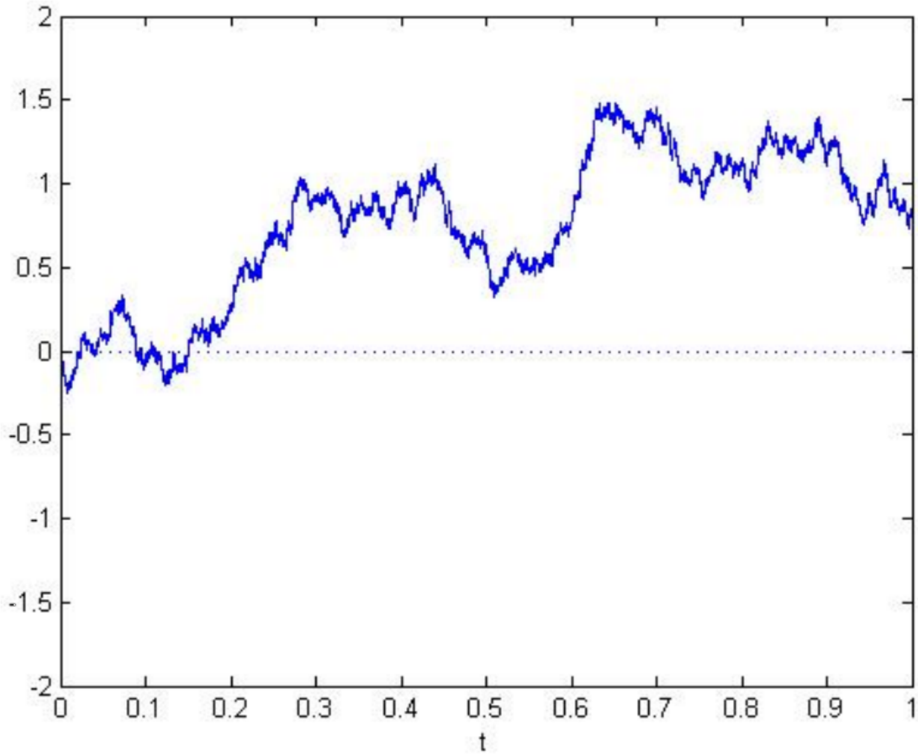


Figura 5.1: El proceso de Wiener.

De la figura anterior, vale la pena mencionar que el proceso no es diferenciable en ninguna parte, es decir, la derivada del proceso no existe. Nota: Si trabajamos en un espacio de probabilidad filtrado, es útil fortalecer el concepto de movimiento browniano.

Definición 8. Sea $(\Omega\ ,\ F)$ un espacio medible. Una filtración en $(\Omega\ ,\ F)$ es una colección $(F_t)t \geq 0$ de σ -álgebra de Ω,tal que $F_s \subset F_t \subset F$ para cualquier $0 \leq s \leq t$.

Una filtración puede ser considerada como una estructura de información dinámica y conforme esta aumenta, significa que se conoce mucha más información, y la pasada no se olvida. Sin embargo, la terna $(\Omega\ ,\ F,\ P)$ se conoce como espacio de probabilidad, a $(\Omega, F, (F_t)t \geq 0, P)$ se le llama un espacio de probabilidad filtrado [39] .
De acuerdo a todo el sustento teórico anterior, a continuación se presenta el modelo de Heston:

5.3. Modelo de Heston

El modelo fue nombrado por Steven L. Heston, un economista matemático y profesor de negocios que tiene un doctorado en finanzas de Carnegie Mellon y ha ocupado puestos docentes en numerosas universidades, incluidas Yale y Columbia. Propuso el modelo que tomó su nombre en su ensayo de 1993 "Solución cerrada en forma de A para opciones con volatilidad estocástica con solicitudes de bonos y opciones de divisas", publicado en The Review of Financial Studies. El documento examinó el precio de una opción de compra europea. En otras palabras, este modelo es un método de opción que tiene en cuenta los cambios en la volatilidad que se observan entre las diferentes opciones negociadas en un momento dado para el mismo activo. A demás, utiliza el proceso Cox-Ingersoll-Ross (CIR) para modelar la dinámica de $V(t)$:

$$dv(t) = k(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dz(t) \tag{5.3}$$

El primer término, está dotado de una reversión media, y por lo tanto hace que la volatilidad tienda a aproximarse a un valor constante, igual a

θ, llamado volatilidad a largo plazo.

La contribución determinista es $k(\theta - V(t))$, donde también se señala que el parámetro k indica la velocidad de oscilación alrededor de la volatilidad a largo plazo: el período de oscilación, por otro lado, es Dada por su inverso $\frac{1}{k}$ [39] [6].

Utilizar una correlación no nula, que representa uno de los aspectos innovadores del modelo de Heston (1993), se deriva de la idea de que la volatilidad del precio de un valor no es completamente independiente de la tendencia de los precios en sí misma: de hecho, es frecuente observar una situación de incertidumbre en el mercado contra una empresa que cotiza en bolsa, y por lo tanto, un aumento de la volatilidad cuando la seguridad se desprecia. En el caso de las materias primas, el aumento del precio conduce a una situación más incierta y a un aumento de la volatilidad.

El segundo término, representa el componente estocástico y contiene el coeficiente σ, que se puede llamar volatilidad e indica la intensidad de la perturbación generada por el movimiento browniano $dz(t)$. Además, observamos que si ocurre la condición $2k\theta \geq \sigma^2$, también tenemos la positividad del proceso $V(t)$, otra propiedad deseable en el modelado de una volatilidad.

Junto al proceso de volatilidad está el proceso de precio $S(t)$, que en el modelo de Heston (1993) tiene, en la medida de probabilidad objetiva P, dinámicas gobernadas por la ecuación diferencial estocástica.

$$ds(t) = \mu S(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dw(t) \tag{5.4}$$

En el modelo Black-Scholes, el término determinista de la derivada indica el valor esperado del precio (debido a que el componente estocástico tiene un valor esperado de cero) y μ representa el rendimiento esperado. Lo que cambia es, la distribución de probabilidad, que ya no es la de un log-normal, sino que es más adecuada para la observada en mercado de opciones, que se aproxima no sólo a los dos momentos anteriores (es decir, media y varianza), pero también sesgo (tercer momento) y curtosis (cuarto momento). En particular, el hecho de que la correlación ρ no sea cero afecta directamente la asimetría y hace que la distribución sea asimétrica. De manera similar, el parámetro σ cambia la probabilidad de eventos raros e interviene a nivel del cuarto momento actuando sobre el grosor de las colas.

Reescribiendo la ecuación en la medida de la probabilidad Q neutral con respecto al riesgo obtenemos, en cambio, como de costumbre, un rendimiento esperado igual al de la seguridad sin riesgo r:

$$ds(t) = rS(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dw(t) \tag{5.5}$$

En el caso, si el $S(t)$ subyacente entrega dividendos continuos de la tasa q (es decir, en un intervalo de tiempo dt, da una cantidad igual a $(qS(t)dt)$.

La ecuación anterior se puede reescribir de la siguiente manera:

$$ds(t) = (r - q)S(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dw(t) \tag{5.6}$$

Agrupando las dos ecuaciones anteriores y cambiando el nombre de los dos movimientos brownianos W_1 y W_2 se obtiene el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales estocásticas

$$\begin{cases} ds(t) = (r - q)S(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dw_1(t) \\ dv(t) = k(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dw_2(t) \end{cases} \tag{5.7}$$

Donde $W_2(t) = pW_1(t) + \sqrt{1 - p^2} \quad W_2(t)$ e $(W_1(t), W_3(t))$ es un movimiento browniano bidimensional. Las nociones brownianas se han reescrito de esta forma para resaltar la presencia de dos procesos independientes W_1 y W_3, mientras que W_2 está relacionado con ellos. Examinando la ecuación para la variación de existencias, $V(t)$, vemos que:

$k(\theta - V(t))\ dt$ es el componente determinístico y $\sigma\sqrt{V(t)}dw_2(t)$ es el componente del movimiento browniano.

Por otro lado, hablaremos de un modelo estocástico de volatilidad en el que el comportamiento de los activos subyacentes se caracteriza por la siguiente dinámica de riesgo neutral.

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^1 \\ dV_t &= \alpha(V - V_t)d_t + \eta\sqrt{V_t} dW_t^2 \\ dW_t^1 dW_t^2 &= \rho dt \end{aligned} \tag{5.8}$$

Los parámetros utilizados en el modelo son:

- S_t es el precio del activo subyacente en el momento t
- r es la tasa libre de riesgo
- V_t es la varianza en el tiempo t
- V es la varianza a largo plazo
- α es la varianza de la velocidad de reversión media
- η Es la volatilidad del proceso de varianza
- $dW_t^1 dW_t^2$ Son dos procesos de Weiner correlacionado con coeficiente de correlación ρ

Bajo el modelo Heston (1993), el activo subyacente sigue un proceso evolutivo que es similar al modelo BSM, pero también introduce un comportamiento estocástico para el proceso de volatilidad.

En particular,[15] asume que la variación de los activos V_t sigue un proceso de inversión de Cox-Ingersoll-Ross. Los modelos de volatilidad estocástica abordan una de las hipótesis más restrictivas del modelo de Black y Scholes (1973); a saber, el supuesto de que la volatilidad permanece constante durante la vida de la opción. Al observar los mercados financieros, se puede ver fácilmente que la volatilidad no es una cantidad constante. Esto también es un reflejo de los diferentes niveles de volatilidad en el mercado, que colectivamente dan lugar a la llamada superficie de volatilidad.

Entre los modelos de volatilidad, la dinámica de [15] exhibe varias propiedades deseables. Primero, modela la volatilidad como un proceso de inversión de la media. Este supuesto es consistente con el comportamiento observado en los mercados financieros. De este modo, se caracteriza por una gran cantidad de activos con la volatilidad que explota o va cerca de cero. En la práctica, sin embargo, estos casos son bastante raros y generalmente de corta duración. En segundo lugar, también introduce choques correlacionados entre la rentabilidad de los activos y la volatilidad.

Este supuesto permite modelar la dependencia estadística entre el activo subyacente y su volatilidad, que es una característica prominente de los mercados financieros. Por ejemplo, en los mercados de renta variable, la volatilidad tiende a aumentar en los precios de las acciones, y esta relación puede tener un impacto sustancial en el precio de las reclamaciones contingentes. En consecuencia, el modelo Heston (1993) proporciona un marco de modelado versátil que puede acomodar muchas características específicas que se observan normalmente en el comportamiento de activos financieros. En particular, el parámetro η Controla la curtosis del activo subyacente y su distribución de retorno, mientras ρ Establece su asimetría.

5.3.1. Solución de forma cerrada del modelo de Heston

Una de las principales ventajas del modelo de Heston (1993), es que el precio de las opciones europeas puede estimarse utilizando una fórmula de valoración semicerrada. El desarrollo de la fórmula de Heston (1993) sigue el enfoque general que se presenta a continuación:

$$C_0 = S_0\Pi_1 - e^{-rT}K\Pi_2$$

Donde Π_1 y Π_2 son dos cantidades relacionadas con la probabilidad. El valor de la llamada bajo el modelo de Heston (1993) se puede calcular obteniendo primero Π_1 y Π_2 usando la dinámica descrita en la anterior ecuación y luego sustituyendo sus valores en la ecuación siguiente. La dificultad surge cuando intentamos calcular estas probabilidades bajo la dinámica de Heston (1993), ya que las densidades de transición para este modelo no están disponibles en forma cerrada. Alternativamente,Π_1 y Π_2 también se puede obtener usando funciones características.

5.3.2. Función característica de Heston

La función característica de Heston (1993) propuesta por [13] es la siguiente:

$$\psi_{ln(S_t)}^{Heston}(W) = e^{[C(t,w)V+D(t,w)V_0+iwln(S_0e^{rt})]} \tag{5.9}$$

$$C(t,w) = \alpha\left[rt - \frac{2}{n^2}ln\frac{1-Ge^{-ht}}{1-G}\right] \tag{5.10}$$

$$D(t,w) = r\frac{1-e^{-ht}}{1-Ge^{-ht}} \tag{5.11}$$

$$r\pm = \frac{\beta \pm h}{\eta^2}; h = \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \tag{5.12}$$

$$G = \frac{r_-}{r_+} \tag{5.13}$$

$$\alpha = -\frac{w^2}{2} - \frac{iw}{2}; \beta = a - \rho\eta iw;\ \gamma = \frac{\eta^2}{2} \tag{5.14}$$

Luego de exponer los fundamentos teóricos del modelo de Heston (1993) para la evaluación de opciones europeas, es necesario resaltar una forma relevante de calcular el precio de las opciones siguiendo el modelo estocástico de volatilidad de Heston (1993). Este, es la simulación de Monte Carlo

5.4. Simulación de Monte Carlo

Los métodos de Monte Carlo son una clase de algoritmos computacionales que se basan en cómputos repetidos y muestreo aleatorio. Esta se utiliza en finanzas para valorar y analizar instrumentos, carteras e inversiones simulando las fuentes de incertidumbre que afectan su valor [37]. Por ejemplo, para que las opciones pueden tener un precio mediante la simulación de Monte Carlo. Primero, el precio del activo subyacente se simula mediante la generación de números aleatorios para varias rutas. Luego, el valor de la opción se encuentra calculando el promedio de los retornos descontados en todas las rutas. Dado que la opción tiene un precio bajo la medida de riesgo neutral, la tasa de descuento es la tasa de interés libre de riesgo y para obtener una buena estimación de la simulación, la varianza del estimador debe ir a cero y, por lo tanto, el número de muestras debe llegar al infinito, lo que no es factible computacionalmente. Por lo tanto, las técnicas de reducción de varianza, como las variables antitéticas y las variables de control, nos ayudan a obtener una mejor estimación en la simulación. De todo lo anterior, es necesario resaltar que la simulación de Monte Carlo es uno de los algoritmos más importantes y potentes en las finanzas, la ventaja de este algoritmo es la capacidad de manejar problemas complejos y de alta dimensión. A su vez, la aplicación es muy común en precios de opciones, gestión de riesgos y modelos financieros. En consonancia con lo anterior, Autores como [38] señalan que una simulación de Monte Carlo puede explicarse simplemente como un modelo matemático que realiza análisis al imputar un rango de valores (distribución de probabilidad) para ofrecer distribuciones de posibles valores de resultado. Las distribuciones de probabilidad utilizadas en MonteCarlo pueden diferir, pero las más utilizadas son Normal, Lognormal, Uniforme, Triangular y Discreto [10] . Dicho de otra manera, La simulación de Monte Carlo es una aplicación de probabilidad especializada que no es más que una ecuación en la que las variables han sido reemplazadas por un generador de números aleatorios.

Capítulo 6

Metodología Propuesta

La metodología del presente trabajo, está enmarcado por un paradigma cuantitativo. Según [25], a partir del paradigma cuantitativo, los investigadores obtienen datos para expresar numéricamente el resultado de la medición de sus variables y mediante procedimientos estadísticos describir el fenómeno de estudio. Con base en lo anterior, se usan datos de las opciones IBEX35 por ser el activo más líquido del MEFF. Para realizar la fijación de precios, es necesario conocer los parámetros del modelo que desea utilizar para describir la dinámica del subyacente. El procedimiento que se ocupa de obtenerlos toma el nombre de calibración del modelo y requiere que los datos relacionados con las opciones de líquidos se realicen correctamente.

Este trabajo se lleva a cabo gracias al uso de información relacionada con las opciones europeas.La variabilidad de la volatilidad permite una descripción de la superficie de volatilidad implícita del mercado (la sonrisa de volatilidad) en el modelo de Heston (1993).

6.1. Procedimiento de calibración en el modelo de Heston

La calibración se puede considerar como el problema inverso de los precios, mientras que en este último se conocen los parámetros del modelo y de ellos se deriva un precio, en la calibración los precios se toman del mercado y el objetivo es volver al modelo que describe la dinámica del subyacente lo más fielmente posible [4]. El objetivo de la calibración es encontrar el conjunto de parámetros que minimiza la distancia entre las predicciones del modelo y los precios de mercado observados. En particular, utilizando el indicador de riesgo, el modelo de Heston (1993) tiene cinco parámetros independientes (V_0 , V , α ,η, ρ) , todos los cuales se pueden determinar al calibrar los precios observados en el mercado de las opciones europeas de varias huelgas o vencimientos. Una vez que se ha determinado un conjunto de parámetros de esta manera, se puede poner precio a otras opciones, por ejemplo, una opción europea diferente, una opción estadounidense o un producto más exótico.

Al calibrar los valores de estos parámetros, se obtiene una evolución para el activo subyacente que sea consistente con los precios actuales de las opciones de vanilla. Los parámetros del modelo Heston (1993) se pueden determinar mediante la calibración a una sonrisa de volatilidad implícita observada en el mercado para las opciones europeas.La calibración toma como punto de partida las volatilidades implícitas para un conjunto de tales opciones, con diferentes huelgas y / o vencimientos. Las volatilidades se convierten a precios de opción, y los parámetros del modelo de Heston (1993) se eligen para que se ajusten mejor a este conjunto de datos del mercado, convirtiéndose en el principal aporte para esta línea de investigación.

Para la calibración se ha usado el código de MATLAB (Ver apéndice B) de Crisóstomo (2014) y datos obtenidos del boletín diario del MEFF del subyacente (MINI IBEX 35) entre el 8 de abril y 31 de mayo de 2019. (Ver anexo 1). Para poder aplicar el código se necesita el bid y el ask, datos que no proporciona el MEFF, por tal razón se ha optado por suponer un spread de 10 puntos en todas las opciones.

6.2. Confiabilidad

Por lo general, para productos financieros modelados con la especificación de un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas, la relación está representada por movimientos brownianos correlacionados (MB). Sin embargo, las observaciones del mercado indican claramente que las cantidades financieras están correlacionadas de una manera fuertemente no lineal, la correlación se comporta incluso de manera estocástica e impredecible [36]. Se deduce que en los mercados financieros, el primer problema de usar un concepto de correlación es la observabilidad, ya que, la correlación en finanzas no es una cantidad determinista. A diferencia del precio, el tipo de cambio, etc., la correlación no puede observarse directamente en el mercado y solo puede medirse en el contexto de un modelo [35]. Es por esto que la confiabilidad radica en el uso de la correlación utilizando un proceso estocástico de reversión de la media. Además, modelando la correlación como un proceso estocástico en el modelo de Heston (1993) se puede mejorar el calibrado [35]. No solo se puede reflejar la variación de la correlación a corto plazo. Los atributos de la correlación a largo plazo están determinados por los valores de los parámetros a largo plazo, como el valor medio a largo plazo y la velocidad de reversión a la media.

Capítulo 7

Resultados

Los resultados principales obtenidos en torno a la calibración del modelo de Heston (1993) evidencian una inclinación hacia un aspecto estocástico debido a la naturaleza y variación de la información. Dichos aspectos se explican a continuación:

7.1. Sonrisa de Volatilidad.

Si traza la volatilidad implícita frente al precio de ejercicio, obtendría el siguiente patrón de curva en forma de U que se asemeja a una sonrisa. De ahí el nombre de sonrisa de volatilidad. Las sonrisas de volatilidad nos dicen que la demanda es mayor para las opciones que están dentro del dinero (ITM) o fuera del dinero (OTM). A continuación veremos la sonrisa de volatilidad (Ver código en el apéndice C) para índice IBEX 35. Esto es:

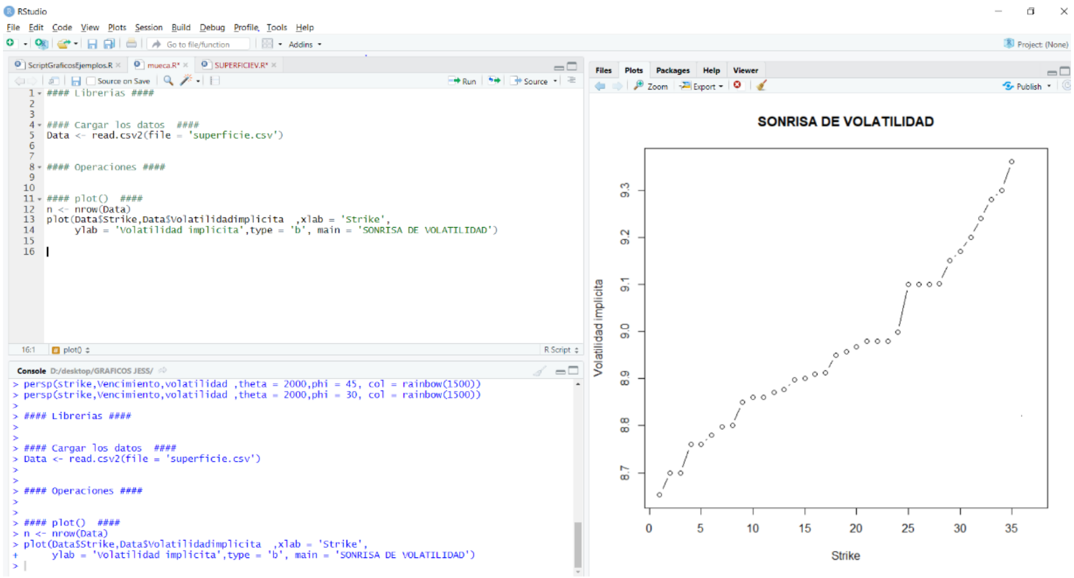


Figura 7.1: Código RSTUDIO para la sonrisa de volatilidad.
Fuente: Autoría Propia

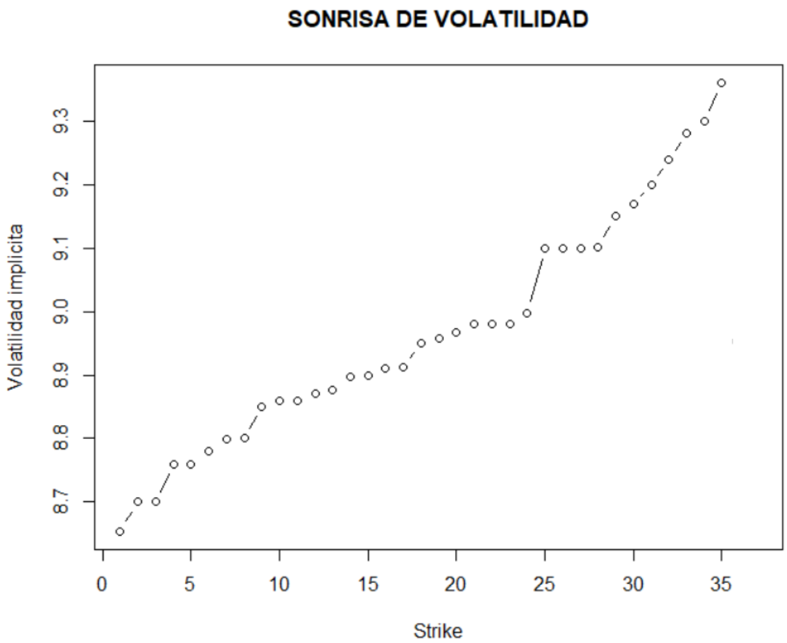


Figura 7.2: Sonrisa de volatilidad para el IBEX 35.
Fuente: Autoría propia

La figura anterior sugiere que las llamadas out-of-the-money y las entradas in-the-money tienen una mayor demanda en comparación con las llamadas in-the-money y las salidas out-of-the-money. Es decir, la sonrisa de volatilidad (a veces llamada sesgo de volatilidad) es un patrón común que generalmente aparece para las opciones de acciones e índices a largo plazo. Para el presente caso, el sesgo de volatilidad "hacia adelante" permite que la volatilidad implícita de las opciones a un precio de ejercicio más bajo sea menor que la volatilidad implícita a un precio de ejercicio más alto.

El patrón de inclinación hacia adelante es común para las opciones en el mercado de productos básicos. Cuando el suministro es escaso, los comerciantes prefieren pagar más por asegurar el suministro que por el riesgo de interrupción. Por ejemplo, si los informes climáticos indican una mayor posibilidad de heladas, el temor a la interrupción del suministro hará que los comerciantes aumenten la demanda de llamadas fuera del dinero para los cultivos afectados como el trigo y la cebada.

7.1.1. Razón de la volatilidad sesgada.

El sesgo de volatilidad revela que para las opciones de venta, la volatilidad implícita es mayor para las opciones OTM profundas y está disminuyendo a medida que avanza hacia las opciones ITM. Para las opciones de compra, la volatilidad implícita es mayor para las opciones ITM profundas y está disminuyendo a medida que avanza hacia las opciones OTM. Desde el grado de demanda y oferta, el sesgo refleja que los inversores están más dispuestos a vender OTM profundos y llamadas ITM. ¿Por qué hay una volatilidad sesgada en el mercado? Primero, la mayoría de las posiciones de capital son largas. Los inversores suelen tener dos formas de cubrir esos riesgos de posiciones largas: comprar put a la baja o vender call al alza. El aumento de la demanda crea aumentos en el precio de las ventas a la baja y disminuye el precio de las llamadas al alza. La volatilidad es un reflejo del precio de las opciones. Por lo tanto, la volatilidad de la apuesta en el dinero es mayor y la volatilidad de la llamada en el dinero es menor. La segunda razón del sesgo de volatilidad es que el mercado baja más rápido de lo que sube. El movimiento a la baja del mercado es más riesgoso que el movimiento al alza. Por lo tanto, el precio de las OTM put es más alto que las llamadas OTM

7.2. Superficie de Volatilidad.

La superficie de volatilidad contiene volatilidades que se utilizan para fijar el precio de una serie de operaciones financieras, por ejemplo, opciones, permutas, etc. Una superficie de volatilidad generalmente tiene tres dimensiones: vencimiento, tenor y valor de volatilidad. Estos valores de volatilidad son volatilidades implícitas que se producen a partir de los precios de mercado de las opciones negociadas y se agrupa las distintas sonrisas de volatilidades para cada vencimiento, así se pueden apreciar las diferentes sonrisas de volatilidad según el vencimiento y la estructura temporal de la volatilidad. Según León (2009), asignar diferentes volatilidades a un mismo subyacente no es más que obviar el supuesto de movimiento browniano, así se puede tener en cuenta el exceso de curtosis y sesgo de los datos reales de mercado.

En el caso particular de las opciones sobre acciones, o índices, la superficie de volatilidad presenta diversos rasgos característicos que se suelen cumplir:

- La volatilidad para cada vencimiento acostumbra a seguir la forma de la nombrada skew o mueca de volatilidad.
- Los skews de vencimientos más lejanos son más planos que los skews de vencimientos próximos, es decir, a medida que el vencimiento es más lejano la diferencia de volatilidad entre las opciones OTM y ITM es menor.
- La tercera característica se deduce de las otras dos y es que las calls OTM cerca de vencimiento tienden a tener volatilidades implícitas superiores que las calls OTM con vencimiento lejano. En cambio las calls ITM tienen volatilidades implícitas menores que las calls ITM con vencimiento lejano. De lo anterior, es bueno precisar que debido a la paridad put-call la volatilidad tanto para las calls o puts OTM como ITM es superior al ATM.

A continuación, en la figura 7.3 y 7.4 se presenta la superficie de volatilidad del IBEX35 a partir de los datos tomados del MEFF (Ver código en apéndice C), observándose que se cumplen las tres características, ya que, la mueca para el primer vencimiento es la más pronunciada y a medida que se va alargando el vencimiento se va aplanando ligeramente.

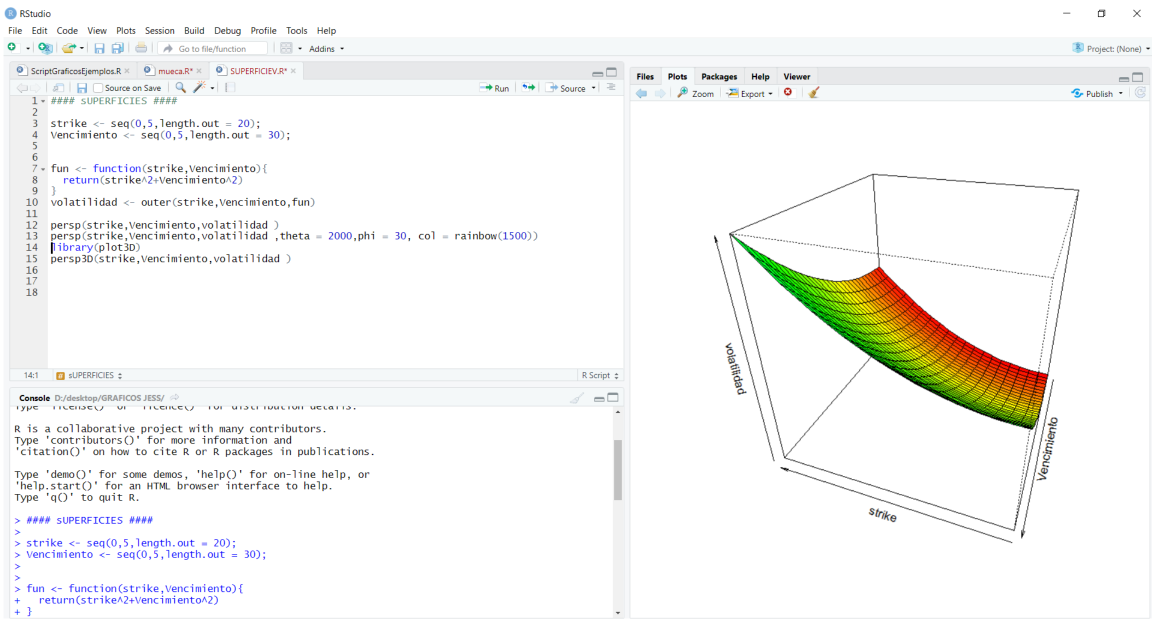


Figura 7.3: Superficie de volatilidad del IBEX 35 en RSTUDIO
Fuente: Autoría propia

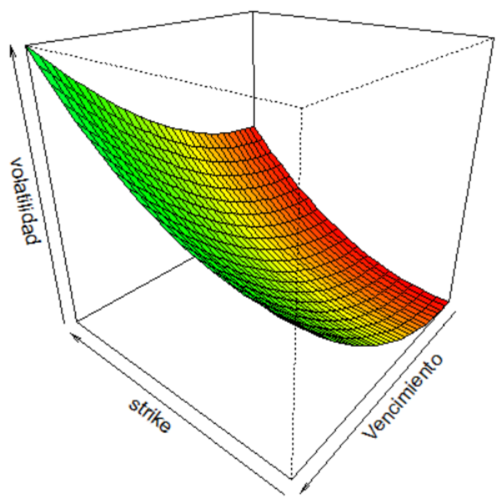


Figura 7.4: Superficie volatilidad IBEX 35.
Fuente: Autoría Propia

El uso más habitual de las superficies de volatilidad es la evaluación del precio de las opciones europeas que no estén cotizadas, o lleven días sin cotizarse. Mediante la interpolación se puede conseguir una volatilidad implícita aproximada y saber el precio al que debería cotizar dicha opción; para que esta evaluación sea buena debe haber suficiente información en el mercado, es decir, suficientes precios de otras opciones con diferentes strikes. Otro uso de la superficie de volatilidad sería para realizar coberturas, tanto de variaciones de la volatilidad como de variaciones en el precio del subyacente. Finalmente, en momentos muy puntuales de mercado, como momentos de pánico, puede servir para localizar oportunidades de arbitraje ya que la superficie de volatilidad debe cumplir unas restricciones para que no se pueda llevar a cabo estas estrategias. De acuerdo con Haugh (2009), para que no se pueda realizar arbitraje se deben cumplir tres condiciones:

- $\sigma(K,T) \geq 0$, para todos los strikes (K) y los vencimientos (T) .
- Para cualquier vencimiento (T), la skew no puede ser demasiado empinada, sino se puede hacer arbitraje con "mariposas".
- La estructura temporal de la volatilidad no puede estar muy invertida, sino se podrá hacer arbitraje con "calendars"

Gráficamente, los 3 incisos mencionados anteriormente se resumen en la figura 6.5 . Esto es:

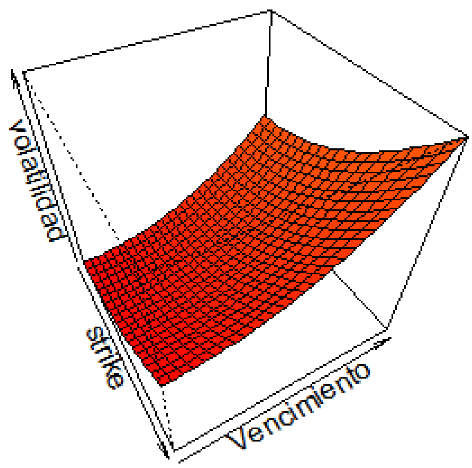
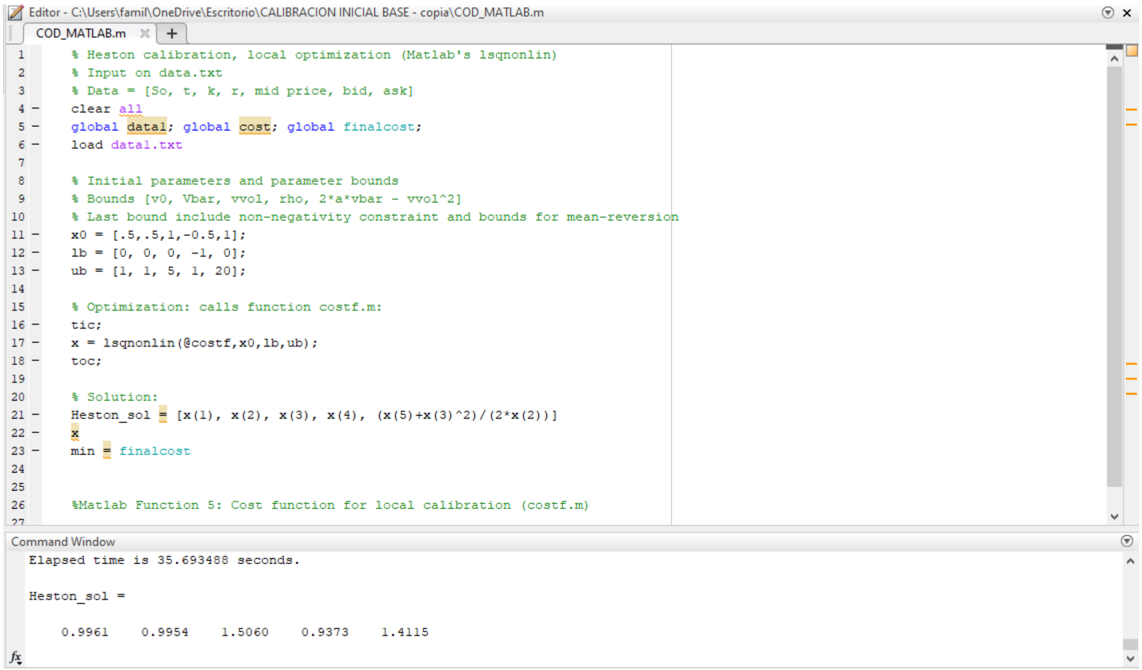


Figura 7.5: Superficie de volatilidad sin arbitraje para la opción Ibex 35
Fuente: Autoría propia

7.3. Calibración

El propósito de la calibración es hacer que los precios del modelo de Heston (1993) se ajusten lo más posible a los precios de mercado observados. Cabe resaltar que para la calibración, se enfatizó en la paridad call – put. Esta define la relación entre call, put y el contrato de futuros subyacente. Este principio requiere que las opciones de compra y venta sean la misma huelga, la misma caducidad y tengan el mismo contrato de futuros subyacente.

La relación put call está altamente correlacionada, por lo que si se viola existe una oportunidad de arbitraje, según Hull (2012), si se cumple la paridad put-call, el smile de volatilidad para un mismo vencimiento debe ser la misma. Dicho de otra manera, la paridad put-call se basa en suponer que si podemos encontrar dos carteras que dan los mismos pagos, ambas carteras deben tener el mismo valor ya que si no existirán oportunidades de arbitraje, la paridad put-call fija una relación entre la prima de las opciones call, de las opciones put, el subyacente y el strike, que en caso de no existir costes de transacción debería ser exacta.Cuando esta relación no se cumple aparecen oportunidades de arbitraje que tenderán a volver al mercado a la posición de equilibrio. En este orden de ideas, Se hizo una calibración con los datos del MEFF (Ver figura 7.7) y se comparó con la calibración hecha con datos de agosto de 2007, realizada por Crespo y Marabel (2010) que muestra la (figura 7.8) Esto es:




```
% Heston calibration, local optimization (Matlab's lsqnonlin)
% Input on data.txt
% Data = [So, t, k, r, mid price, bid, ask]
clear all
global data1; global cost; global finalcost;
load data1.txt

% Initial parameters and parameter bounds
% Bounds [v0, Vbar, vvol, rho, 2*a*vbar - vvol^2]
% Last bound include non-negativity constraint and bounds for mean-reversion
x0 = [.5,.5,1,-0.5,1];
lb = [0, 0, 0, -1, 0];
ub = [1, 1, 5, 1, 20];

% Optimization: calls function costf.m:
tic;
x = lsqnonlin(@costf,x0,lb,ub);
toc;

% Solution:
Heston_sol = [x(1), x(2), x(3), x(4), (x(5)+x(3)^2)/(2*x(2))]
x
min = finalcost


%Matlab Function 5: Cost function for local calibration (costf.m)
```



```
Elapsed time is 35.693488 seconds.

Heston_sol =

    0.9961    0.9954    1.5060    0.9373    1.4115
```

Figura 7.6: captura del código rodando.

V_0	$\bar{V}$	η	ρ	a
0.9961	0.9954	1.5060	0.9373	1. 4115

Figura 7.7: Calibración del modelo de Heston con datos del 08/04/2019 - 31/05/2019

De la figura anterior, se observa que la correlación entre los procesos correspondientes al activo subyacente y a la varianza estocástica es positiva, lo cual es consistente con el skew positivo (Figura 7.2) de volatilidad observado en los datos de mercado. Es decir, el modelo Heston(1993) calibrado proporciona una buena combinación para la mayoría de las opciones negociadas De hecho, la restricción de no negatividad: además de los límites de los parámetros, se requiere otra condición para garantizar que el proceso de variación en el modelo de Heston (1993) no alcance valores cero o negativos. En este sentido, [14] muestra que una restricción $2aV - \eta > 0$ (generalmente conocida como la condición de [14]) garantiza que la variación en un proceso CIR siempre es estrictamente positiva.

$v(0)$	θ	σ_v	ρ	κ
0,0426	0,0585	0,3446	-0,78	1,97

Figura 7.8: Calibración del modelo de Heston con datos de agosto 2007
Fuente: Crespo y Marabel (2010)

De la figura 7.8 se observa que la volatilidad media, en el equilibrio de largo plazo está alrededor de 24,19 % , mientras que la volatilidad de corto plazo V_0 es de 20,64 %. Dados los precios de las opciones europeas, calculados a partir de los parámetros del modelo de Heston (1993), es posible utilizar la fórmula de Black-Scholes (1973) para determinar la volatilidad implícita que iguala ambos precios. De esta forma, se puede construir la superficie de volatilidad implícita (Figura 7.4) generada por el modelo de Heston (1993). Cabe señalar, que la volatilidad implícita y la información relativa a los tipos de interés se obtienen de la calculadora de opciones del MEFF (Ver anexo 2), Por otro lado, se puede evidenciar entre las dos tablas que hay diferencias significativas. Esto constata uno de los problemas del modelo de Heston (1993), esto es, que se debe ir calibrando el modelo recurrentemente para poder tener una mejor precisión y aproximación.

Luego de haber calibrado el modelo y encontrado los parámetros, se procede a evaluar la opción para obtener los precios del IBEX 35. Esto es:

7.4. Evaluación de la opción europea IBEX 35

Una forma de calcular el precio de las opciones siguiendo el modelo estocástico de volatilidad de Heston (1993) es discretizando los diferenciales y aplicando Monte Carlo. Primero que todo se deben simular los procesos de Wiener correlacionados. Se crea

$$Z_1 \backsim N(0,1) \;\; y \;\; Z_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2 Z} \tag{7.1}$$

donde es otra normal estándar. Se discretizan las dos diferenciales:

$$V(t_{j+1}) = V(t_j) + k(\theta - V(t_j))(t_{j+1} - t_j) + \sigma_v \sqrt{V(t_j)} Z^2 \sqrt{t_{j+1} - t_j} \tag{7.2}$$

$$S(t_{j+1}) = S(t_j) + rS(t_j)(t_{j+1} - t_j) + \sqrt{V(t_j)} S(t_j) Z_1 \sqrt{t_{j+1} - t_j} \tag{7.3}$$

Y así, ya se puede aplicar Monte Carlo para valorar la opción. Luego, se ha creado un código de R (Ver apéndice D), para poder valorar opciones siguiendo el proceso arriba mencionado y con un vencimiento inferior al año, que son de las opciones de las que se dispone de más información en el MEFF. Para evitar que la simulación de la volatilidad tome valores negativos aplicando Monte Carlo, se ha optado por el paquete ESGtoolkit donde se pueden valorar opciones, con vencimiento a más de un año, como lo señala Anderson (2007). En el paquete NMOF está la función callHestoncf que calcula mediante la “fórmula cerrada de Heston” el valor de la opción. Es decir, Calcula el precio de una llamada europea bajo el modelo Heston (1993). Para valorar estas opciones se ha usado la calibración de la Figura 6.7 que está sujeta a la volatilidad implícita. Se debe tener en cuenta que la función también tiene un argumento implVol que por defecto es FALSO. Si se establece en TRUE, la función devuelve una lista con callPrice y la volatilidad que daría el mismo precio con el modelo Black y Scholes (1973). Para esto se ha usado la función uniroot.

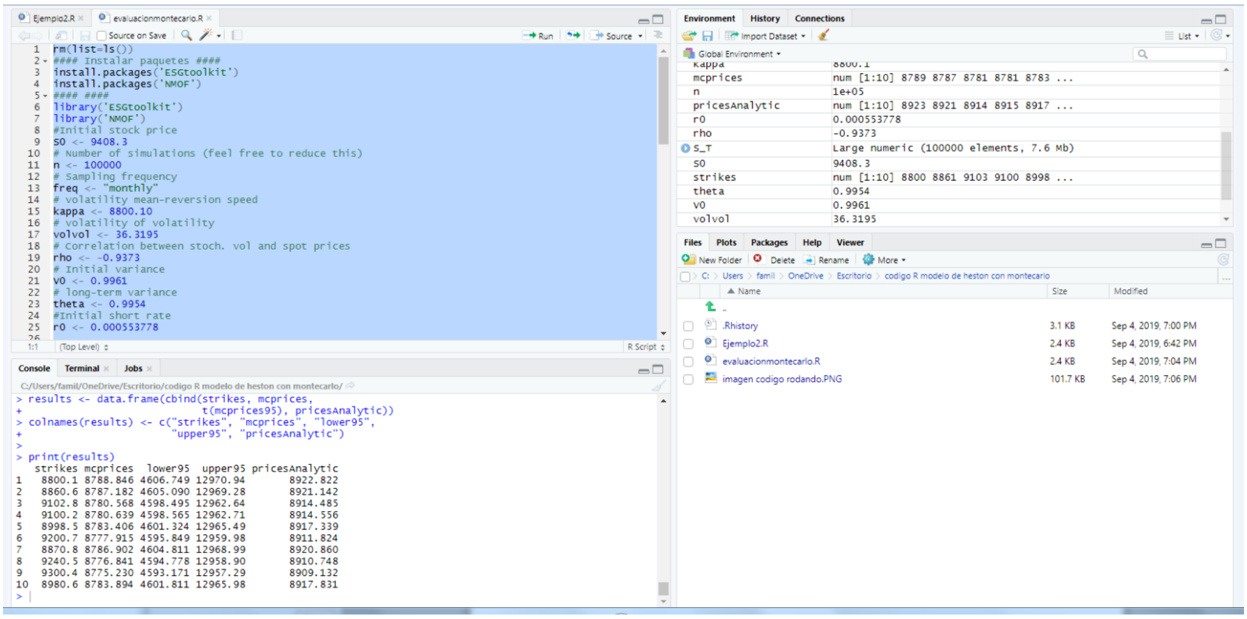


Figura 7.9: Evaluación por Monte Carlo del IBEX 35 en RSTUDIO
Fuente: Autoría Propia

```
   strikes mcprices  lower95  upper95 pricesAnalytic
1   8800.1 8788.846 4606.749 12970.94       8922.822
2   8860.6 8787.182 4605.090 12969.28       8921.142
3   9102.8 8780.568 4598.495 12962.64       8914.485
4   9100.2 8780.639 4598.565 12962.71       8914.556
5   8998.5 8783.406 4601.324 12965.49       8917.339
6   9200.7 8777.915 4595.849 12959.98       8911.824
7   8870.8 8786.902 4604.811 12968.99       8920.860
8   9240.5 8776.841 4594.778 12958.90       8910.748
9   9300.4 8775.230 4593.171 12957.29       8909.132
10  8980.6 8783.894 4601.811 12965.98       8917.831
> 
```

Figura 7.10: Evaluación del precio de una call calculada usando el método de Monte Carlo y la "fórmula cerrada de Heston"
Fuente: Autoría Propia

STRIKE	DIAS VENCI-DOS	PRECIO CON MONTE CARLO MEDIA	INTERVALO DE CONFIANZA 95%		PRECIO FORMULA CERRADA DE HES-TON	PRECIO DEL MEEF
8.800,1	10	8.788,85	4.606,75	12.970,94	8.922,82	9004,2
8.860,6	9	8.787,18	4.605,09	12.969,28	8.921,14	9157,8
9.102,8	8	8.780,57	4.598,50	12962,64	8.914,49	9080,5
9.100,2	7	8.780,64	4.598,57	12962,71	8.914,49	9191,8
8.998,5	6	8.783,41	4.601,32	12965,49	8.917,34	9216,4
9.200,7	3	8.777,92	4.595,85	12959,98	8.911,82	3174,6
8.870,8	2	8.786,90	4.604,81	12968,99	8.920,86	9114
9.240,5	1	8.776,84	4.594,78	12958,9	8.910,75	9232,2
9.300,4	0	8.775,23	4.593,17	12957,29	8.909,13	9239,1
8.980,6	24	8.783,89	4.601,81	12965,98	8.917,83	9199,7

Figura 7.11: Comparación de precios del MEFF y los precios usando el método de Monte Carlo y la "fórmula cerrada de Heston"."

De la Figura anterior, se puede comprobar que el precio obtenido usando la formula cerrada de Heston, está dentro del intervalo de confianza del 95 % en todos los casos Así, dicho precio está bastante próximo a la media (precio con Monte Carlo) brindada por la simulación. Por lo anterior, se usará la fórmula cerrada ya que computacionalmente es mucho menos exigente. Por otro lado, también se puede observar que si se usa el cuadrado de la volatilidad implícita como $V(0)$ se infravalora el precio de la call OTM y sobrevalora la call ITM, esto es debido al skew de volatilidad.

Capítulo 8

Conclusiones y Recomendaciones

8.1. Conclusiones

A continuación se expondrán las conclusiones que coinciden con los objetivos específicos, esto es :

- Luego de presentado el modelo de Heston como se ha podido constatar en el presente informe, la volatilidad de las acciones no es constante ya que depende tanto del strike como del vencimiento. Es por esto que los modelos de volatilidad estocástica abordan una de las hipótesis más restrictivas del marco Black-Scholes, que supone que la volatilidad permanece constante durante la vida útil de la opción. Sin embargo, al observar los mercados financieros se hace evidente que la volatilidad puede cambiar drásticamente en períodos de tiempo cortos y su comportamiento claramente no es determinista. Debido a esto, entre los modelos de volatilidad estocástica, el modelo Heston presenta dos ventajas principales. Primero, modela una evolución del activo subyacente que puede tener en cuenta la asimetría y el exceso de curtosis que generalmente se observan (y se esperan) en los rendimientos de los activos financieros. En segundo lugar, proporciona soluciones de forma cerrada para la fijación de precios de las opciones europeas. La disponibilidad de fórmulas de valoración de forma cerrada es particularmente importante para el proceso de calibración. En conclusión, Al permitir que la volatilidad sea estocástica, el modelo de Heston puede generar una distribución de retorno más leptokurtica. Una asimetría negativa también puede generarse por una correlación negativa entre el proceso del precio de las acciones y el proceso de volatilidad. Además, el modelo Heston también puede tener una superficie de volatilidad implícita que es similar a la generada por los datos del mercado. Por lo tanto, el modelo Heston ofrece una buena modificación para describir los mercados financieros reales.

En este trabajo, propusimos un marco basado en volatilidades implícitas para el proceso de calibración del modelo estocástico de Heston , En particular, enfocándonos en los problemas de calibración de alta dimensión de los modelos Heston. El enfoque propuesto tiene varias características favorables, donde una importante es la robustez sin elegir valores iniciales específicos. Se ha evidenciado que para el caso de opciones plain vanilla europeas, como son las opciones sobre el IBEX35, usando la superficie de volatilidad y la volatilidad implícita como simplicidad y ajuste, el modelo de Heston se puede calibrar de una manera práctica. En conclusión, en el caso del IBEX35 este proceso calibración es especialmente útil para vencimientos cortos ya que el MEFF proporciona mucha información para los primeros vencimientos, pero poca para los vencimientos más alejados.

- El arbitraje de volatilidad es una estrategia relativamente nueva que ha surgido en los últimos años, la idea clave es negociar la volatilidad como una clase de activos propia. Un operador de volatilidad evalúa la variación futura del rendimiento del instrumento subyacente, la compara con la volatilidad implícita del mercado y decide si las opciones están sobrevaluadas o infravaloradas. En la mayoría de los mercados, el comercio activo en una amplia gama de huelgas y las fechas de caducidad pueden llevar a esperar que la dinámica de la superficie de volatilidad sea bastante complicada. Estas superficies de volatilidad no pueden tener una forma arbitraria; están limitados por condiciones de no arbitraje (como la convexidad del precio con respecto a la huelga). La práctica generalizada de cotizar precios de opciones en términos de volatilidades implícitas de Black-Scholes de ninguna manera implica que los participantes del mercado creen que los retornos subyacentes son lognormales. Por el contrario, la variación a través de la opción de ejercicio y el plazo hasta el vencimiento, que se conoce ampliamente como la superficie de volatilidad, puede ser sustancial. Dicha superficie de volatilidad dada por el modelo en un futuro puede ser muy diferente de la superficie de volatilidad inicial. Por ejemplo, en el caso de una moneda extranjera, la relación inicial en forma de U entre la volatilidad implícita y el precio de ejercicio puede evolucionar hacia una donde la volatilidad sea una función monotónica de aumento o disminución del precio de ejercicio. Para el presente trabajo final, se ha demostrado que una correlación cero entre la volatilidad y el precio de los activos solo puede ser consistente con una sonrisa de volatilidad en forma de U. Es por esto, que las volatilidades implícitas para la calibración del modelo de Heston fueron manejadas con una condición de no arbitraje que deben cumplir las volatilidades. Dicha condición conduce a las siguientes conclusiones:

(a) cuando la volatilidad es independiente del precio del activo debe haber una sonrisa de volatilidad en forma de U.

(b) cuando la volatilidad implícita es una función decreciente (creciente) del precio del activo debe haber una negativa (positiva) correlación entre la volatilidad y el precio del activo.

Cuando se habla de la volatilidad de la sonrisa es importante enfatizar que, dado que el contrato de opción IBEX-35 es una opción europea, el patrón de volatilidades implícitas en los diferentes precios de ejercicio proporciona evidencia directa de la forma de la densidad neutral al riesgo, en relación con el punto de referencia lognormal. Por supuesto, esto se debe a que la segunda derivada del precio de la opción call (put) europea con respecto al precio de ejercicio es proporcional a la densidad de probabilidad neutral de riesgo apropiada. Este argumento implica que, de hecho, nuestro objetivo es explicar la verdadera distribución implícita en los precios de las opciones reales. Bajo esta línea de razonamiento, los resultados de nuestras secciones anteriores sugieren que la distribución implícita en el mercado español es leptokurtica en (ambos) la cola derecha e izquierda de la distribución. Esto significa que las llamadas fuera del dinero (put in-the-money) y put (in-the-money call) que pagan bajo realizaciones en las colas son más valiosas que las predichas por el modelo Black y scholes con su lognormal. Ya que, las volatilidades implícitas en todas las huelgas en el mismo mes cuando se grafican parecen una sonrisa. La 'sonrisa de volatilidad' muestra una volatilidad implícita creciente a medida que avanza hacia huelgas más bajas y una volatilidad decreciente a medida que avanza hacia huelgas más altas. En síntesis, el análisis de los determinantes de la sonrisa de volatilidad se basa en tres categorías de variables económicas. Los determinantes económicos deben incluir características relevantes del activo subyacente, variables económicas que ayudan a predecir el mercado de valores futuro y algunas características del mercado de opciones en sí. En particular, las violaciones de una función de volatilidad implícita constante pueden deberse a los efectos de los costos de negociación o al grado de liquidez del mercado de opciones. Teniendo en cuenta la importancia y la relación inversa entre el tiempo hasta el vencimiento y el grado de curvatura, estamos tentados a concluir que las condiciones del mercado y los costos de transacción son relativamente más importantes para el calibrado del modelo de Heston, siempre que haya un corto camino por recorrer en la vida de la opción. Es por esto que los costos de iliquidez son un determinante crucial de la magnitud que observamos en la sonrisa de volatilidad y en la complejidad de calibrado para el modelo de Heston.

- El método de Monte Carlo, uno de los métodos numéricos más populares, que permite calcular aproximadamente el precio de un contrato a través de un número sustancial de simulaciones y promediarlas a través de un esquema de tipo Euler, se ha simulado asumiendo el caso de un movimiento browniano geométrico. Esta simulación se realiza para la opción de compra y la opción de venta. Aunque puede ser redundante, pues se llega de una a otra mediante la paridad put-call. Luego de realizada la simulación Monte Carlo del precio de la opción para verificar si, en efecto, la fórmula propuesta funciona adecuadamente, se concluye con que la metodología propuesta es buena. Pues para una opción de compra, el precio estimado se calculó utilizando el método de Monte Carlo, con un intervalo de confiabilidad del 95 %. Por otro lado, se concluye que através de la repetición del Método Monte Carlo, la precisión mejora debido a la Ley de Grandes Números. Específicamente, al realizar el experimento n veces, cada vez en las mismas condiciones y cada vez independientemente el uno del otro ,el valor promedio está muy cerca del valor esperado con una probabilidad muy alta. Estamos de acuerdo en que hay mucha novedad interesante en los métodos de Monte Carlo y mucho por descubrir al diferenciarlos de otros métodos. En particular, ofrecen resultados que otros métodos encuentran difíciles o incluso imposibles en la práctica; y son distintivos en su dependencia de la novedosa tecnología computacional de nuestra era moderna. El peligro es que la emoción de esta novedad nos arrastra a creer que hemos encontrado algún modo de investigación cualitativamente nuevo, por eso las simulaciones de Monte Carlo son pragmáticas y no abren nuevos canales epistémicos. Por todo lo anterior, se concluye que la simulación de Monte Carlo, con su simplicidad y flexibilidad en la implementación del modelo, resulta ser la primera opción para fijar precios de opciones europeas con volatilidad estocástica.

8.2. Recomendaciones

Para cumplir con el objetivo de trascender en el proceso de calibración en la tesis desarrollada, se hacen las siguientes recomendaciones:

- Estudiar e implementar el ”problema de calibración.^{en} la opción IBEX35 con un mayor volumen de datos, que represente la evolución del subyacente con un porcentaje de confiablidad más alto.

- usar la metodología explicada para valorar opciones con un vencimiento distinto al estándar, así se dispondría de un precio de referencia con el que negociar el precio de opciones OTC que tengan las mismas características que el mercado regulado a excepción del vencimiento.

- Simular el modelo de Heston con un enfoque en Monte Carlo, especialmente para ciertos derivados que no pueden ser tratados en forma cerrada.

- Debido a las oscilaciones de la función característica de Heston, se podría probar métodos de cuadratura adaptativa como Gauss-Kronrod como puntos de referencia de alta precisión.

- Puede ser interesante extender los resultados para incluir saltos en el precio de registro normal; estos generalmente se agregan a la dinámica de Heston para capturar la sonrisa de volatilidad implícita a corto plazo para vencimientos de una semana o menos, que no se re-produce bien en los modelos de volatilidad estocástica continua.

- Vale la pena investigar cómo la elección de la función objetivo y de los puntos de observación afectan el rendimiento de la calibración, y repetir las pruebas numéricas en el mercado real.

Bibliografía

[1] González A., Montoya, A., y Vásquez, J. (2007). *"Estado del arte sobre administración de austicia, justicia pública y privada, y guerra y justicia"*, Opinión Jurídica, 6(11), enero-junio, 49 – 65. Universidad de Medellín. Colombia. (Citado en página 11.)

[2] Bonilla, C., Hurtado, J., y Jaramillo C. (2009) B*La investigación. Aproximaciones a la construcción del conocimiento científico. Colombia: Alfaomega.* (Citado en página 6.)

[3] Black F. & Scholes, M. (1973) *the pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy 81, pp.* 637 – 659 . (Citado en páginas XIII, XIV, 3, 4, 9 y 10.)

[4] Carr, P. P., y Madan, D. (1998). *Towards a theory of volatility trading. In R. Jarrow (Ed.), Volatility, Risk Publications,* 417 – 427. (Citado en página 28.)

[5] Corrado, C.,y Su, T. (1997). *Implied volatility skews and stock return skewness and kurtosis implied by stock option prices. European Journal of Finance 3, 73-85.* (Citado en páginas XII y XIV.)

[6] Cox, J., y Ross, S. (1976). *The valuation of options for alternative stochastic processes. Journal of Financial Economics, 3,* 145–166. (Citado en página 21.)

[7] Cuesta, G. (S.f). *Introducción a los modelos de volatilidad estocástica. (Tesis de maestría).* Universidad nacional de educación a distancia, Madrid, España. Recuperado de http://e-spacio.uned.es/fez/eserv/bibliuned:masterMatavanz-Gcuesta/Documento.pdf (Citado en páginas XIII, XIV, 5 y 12.)

[8] Derman, E. (2003). *Laughter in the dark. The problem of the volatility smile, Working paper, University of Amsterdam.* (Citado en páginas 3 y 13.)

[9] Duffie, D. (2001). *Dynamic Asset Pricing Theory, 3rd edition ed. Princeton University Press.* (Citado en página 16.)

[10] Jackel, P. (2002). *Monte Carlo Methods in Finance. John Wiley y Sons, New Jersey.* (Citado en página 26.)

[11] Neftci, S. (2000). *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives,2nd edition ed. Academic Press, Elsevier.* (Citado en página 16.)

[12] Echeverry, M. (2015). *Calibración del Modelo de Volatilidad Estocástica de Heston (El Caso de una Opción en Divisas). (Tesis de maestría).* Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia. (Citado en página 14.)

[13] Gatheral, J. (2006). *The Volatility Surface: A Practioner's Guide, Wiley Finance, New York.* (Citado en página 25.)

[14] Feller, W. (1951). *Two Singular Diffusion Problems. Annals of Mathematics* 54*, 173–182.* (Citado en página 38.)

[15] Heston, S. (1993). *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, Review of Financial Studies* 6*,* 327 – 343. (Citado en páginas 3, 9, 10, 23 y 24.)

[16] Hoyos, C. (2000).*Un modelo para una investigación documental. Guía teórico práctica sobre construcción de estados del arte.* Medellín: Señal. (Citado en páginas XIII y 11.)

[17] Hull, J.C. (2012).*Volatility Smiles. Options, Futures, and Other Derivatives 8 th edition, Prentice Hall. Boston.* (Citado en página XIV.)

[18] Jacquier E.& Jarrow R., (2000).*Bayesian analysis of contingent claim model error. J. Econometrics* 94(1–2)*,* 145–180*. ISSN* 0304 – 4076. (Citado en página 6.)

[19] LÀZARO, J. (2018).*An accurate heston implementation with usd-cop data. Tesis de maestría. Universidad del Rosario, Bogotá, Colombia.* (Citado en página 14.)

[20] LEÓN, C. (2009).*Una aproximación teórica a la superficie de volatilidad en el mercado colombiano a través del modelo de difusión con saltos. Borradores de Economía* 570. (No citado.)

[21] LI, Y. (2006). *Models with Smiles and Skews: Calibrations and Implementations. Working paper, Mitsubishi UFJ Securities Intl.* (Citado en página 6.)

[22] LORENZO, R.(1996). *La volatilidad: modelización en la valoración de opciones y estimadores. Investigaciones Europeas de Dirección y Economía de la Empresa,* 2(1)*, pp.* 59 – 83. (Citado en página 11.)

[23] MADAULA, O.(2016). *Superficie de volatilidad e interpolación de opciones del Ibex no cotizadas. (Tesis de maestría). Universidad de Barcelona, Barcelona, España.* (Citado en página 12.)

[24] MIKOSCH, T. (1998). *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View. World Scientific Publishing.* (Citado en página 18.)

[25] MONJE, C.(2011). *Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa - Guía práctica. Neiva: Universidad Surcolombiana.* (Citado en página 27.)

[26] ORTIZ, A., VENEGAS, F., Y DURÁN, M.(2014). *Valuación de opciones europeas sobre AMX-L, WALMEX-V y GMEXICO-B: Calibración de parámetros de volatilidad estocásticacon funciones cuadráticas de pérdida. Trimestre Economico,* 4(324)*,* 943 – 988. (Citado en página 13.)

[27] ROJAS, M.(2015). *Valuación de opciones en el modelo de volatilidad estocástica de Heston: un nuevo método analítico de solución. (Tesis de pregrado). Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapan de León, Oaxaca, México.* (Citado en página 13.)

[28] RUBINSTEIN, M,(1994) . *Implied binomial trees. Journal of Finance* 49*, pp.*771 – 818. (Citado en páginas 3 y 9.)

[29] Ruiz, E., y Veiga, H.(2008). *Introducción a los modelos de volatilidad estocástica. Anales de estudios económicos y empresariales,*18*, pp.*9 – 68. (Citado en página 12.)

[30] Shiryaev, A.(1998). *Foundation of Stochastic financial mathematics. Fazis, Moscow 1998; English transl., Essentials of stochastic finance: facts, models, theory.Singapore, River Edge, NJ*1999*, World Scientific, Vol.* 1, 2. (Citado en página 3.)

[31] Shreve, S. (2004). *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model. Springer-Verlag - New York.* (Citado en página 17.)

[32] Steele, J. (2001). *Stochastic Calculus and Financial Applications. Springer- Verlag - New York.* (Citado en página 16.)

[33] Sora, F. y Uriza, M.(2013). *Estudio numérico del modelo de Heston: método de diferencias finitas. (Tesis de maestría). Universidad EAFIT, Medellín, Colombia.* (Citado en página 14.)

[34] Uribe, J.(2005). *La investigación documental y el estado del arte como estrategias de investigación en ciencias sociales en la investigación en ciencias sociales. Estrategias de investigación. Bogotá: Ediciones Universidad Piloto de Colombia.* (Citado en página 11.)

[35] Teng, L., Ehrhardt, M., y Gunther, M. (2014). *Modelling Correlation as a Stochastic Process, Preprint, University of Wuppertal.* (Citado en página 29.)

[36] Van Emmerich, C. (2006). *Modelling Correlation as a Stochastic Process, Preprint, University of Wuppertal.* (Citado en página 29.)

[37] Kwak, Y., y Ingall, L. (2007). *Exploring Monte Carlo Simulation Applications for Project Management. Risk Management,* 9(1)*,* 44 – 57*. doi:*10.1057*/palgrave.rm.*8250017 (Citado en página 25.)

[38] Srivastava, A. y Bajaj, R. (2014). *A practical application of Monte Carlo simulation for options pricing. NMIMS Management Review, 25 (October-November),* 60 – 77*. Retrieved from* http://www.nmims.edu/management-review/october-2014/

apractical-application-of-monte-carlo-simulation-for-options-pricin
(Citado en página 26.)

[39] S. Ross, (2010). *"A First Course in Probability," Eighth Edition, Prentice Hall, New Jersey.* (Citado en páginas 17, 18, 19, 20 y 21.)

[40] Yang, Y.(2013). *Valuing a European Option with the Heston Model. (Tesis de maestría). Rochester Institute of Technology, Rochester, New York.* (Citado en página 13.)

ANEXOS

Anexo 1. Datos usados en la calibración

Spot	Maturity	Strike	Interest rate	Mid	Bid	Ask
9,408.30	10	8.800,10	0.000553778	9,408,30	9,403,30	9,413,30
9,407.50	9	8.860,60	0.000553778	9,407,50	9,402,50	9,412,50
9,388.10	8	9.102,80	0.000553778	9,388,10	9,383,10	9,393,10
9,450.50	7	9.100,20	0.000553778	9,450,50	9,445,50	9,455,50
9,464.40	6	8.998,50	0.000553778	9,464,40	9,459,40	9,469,40
9,484.20	3	9.200,70	0.000659467	9,484,20	9,479,20	9,489,20
9,495.30	2	8.870,80	0.000659467	9,494,80	9,489,30	9,500,30
9,551.70	1	9.240,50	0.000659467	9,551,70	9,546,70	9,556,70
9,556.50	0	9.300,40	0.000659467	9,556,50	9,551,50	9,561,50
9,490.20	24	8.980,60	0.000659467	9,490,20	9,485,20	9,495,20
9,412.80	23	8.760,58	0.000850338	9,412,80	9,407,80	9,417,80
9,459.30	22	9.150,30	0.000850338	9,459,30	9,454,30	9,464,30
9,478.90	21	9.170,38	0.000850338	9,478,90	9,473,90	9,483,90
9,502.40	18	9.280,60	0.000850338	9,503,90	9,497,40	9,510,40
9,560.30	17	9.360,84	0.000850338	9,560,30	9,555,30	9,565,30
9,408.90	15	8.980,65	0.000850339	9,408,90	9,403,90	9,413,90
9,395.20	14	8.912,40	0.000850340	9,395,20	9,390,20	9,400,20
9,343.00	11	8.980,95	0.000850341	9,343,00	9,338,00	9,348,00
9,221.00	10	8.900	0.000850342	9,221,00	9,216,00	9,226,00
9,234.10	9	9.100,30	0.000850343	9,234,10	9,229,10	9,239,10
9,079.30	8	8.850,35	0.000850344	9,076,80	9,074,30	9,079,30
9,126.40	7	8.760,40	0.000850345	9,126,40	9,121,40	9,131,40
9,040.00	4	8.780,65	0.000850346	9,040,00	9,035,00	9,045,00
9,114.70	3	8.654,40	0.000850347	9,114,70	9,109,70	9,119,70
9,169.60	2	8.700,50	0.000850348	9,169,6	9,164,60	9,174,60
9,295.60	1	8.967,20	0.000850349	9,295,60	9,290,60	9,300,60
9,255.90	0	9.100,30	0.000850350	9,255,90	9,250,90	9,260,90
9,152.00	32	8.70,54	0.000850351	9,152,00	9,147,00	9,157,00
9,197.50	31	8.957,32	0.000850352	5,057,50	9,192,50	9,202,50
9,200.90	30	8,745,50	0.000850353	9,200,90	9,195,90	9,205,90
9,085.30	29	8.860,58	0.000850354	9,085,30	9,080,30	9,090,30
9,128.70	28	8.876,32	0.000850355	9,128,70	9,123,70	9,133,70
9,172.50	25	8.910,32	0.000850356	9,172,50	9,167,50	9,177,50
9,139.20	24	8.950,32	0.000850357	9,139,20	9,134,20	9,144,20
9,034.80	23	8.798,50	0.000850358	9,034,80	9,029,80	9,039,80
9,115.40	22	8.897,26	0.000850359	9,115,40	9,110,40	9,120,40
8,975.60	21	8.700,58	0.000850360	8,975,60	8,970,60	8,980,60

Anexo 2. Calculadora del MEFF para volatilidad implícita.

Apéndice A. Código de MATLAB del proceso de Wiener

```
Algorithm 1 Simulating a Brownian Motion in Matlab
k = 100; w = zeros(100,1); w(1) = 0;
for i=1:k-1
w(i+1) = w(i) + sqrt(1/100)*randn;
end
```

Apéndice B. Código de MATLAB Crisóstomo (2014)

```
% Heston calibration, local optimization (Matlab's lsqnonlin)
% Input on data.txt
% Data = [So, t, k, r, mid price, bid, ask]
clear all
global data1; global cost; global finalcost;
load data1.txt

% Initial parameters and parameter bounds
% Bounds [v0, Vbar, vvol, rho, 2*a*vbar - vvol^2]
% Last bound include non-negativity constraint and bounds for mean-reversion
x0 = [.5,.5,1,-0.5,1];
lb = [0, 0, 0, -1, 0];
ub = [1, 1, 5, 1, 20];

% Optimization: calls function costf.m:
tic;
x = lsqnonlin(@costf,x0,lb,ub);
toc;

% Solution:
Heston_sol = [x(1), x(2), x(3), x(4), (x(5)+x(3)^2)/(2*x(2))]
x
min = finalcost


%Matlab Function 5: Cost function for local calibration (costf.m)
```

Apéndice C. Superficies de volatilidad

```
#### SUPERFICIES ####

strike <- seq(0,5,length.out = 20);

Vencimiento <- seq(0,5,length.out = 30);

fun <- function(strike,Vencimiento){

  return(strike^2+Vencimiento^2)}

volatilidad <- outer(strike,Vencimiento,fun)

persp(strike,Vencimiento,volatilidad )

persp(strike,Vencimiento,volatilidad ,theta = 2000,phi = 30, col = rainbow(1500))

library(plot3D)

persp3D(strike,Vencimiento,volatilidad )


#### SONRISA  ####

Data <- read.csv2(file = 'superficie.csv')

#### plot()  ####

n <- nrow(Data)

plot(Data$Strike,Data$Volatilidadimplicita  ,xlab = 'Strike',

    ylab = 'Volatilidad implicita',type = 'b', main = 'SONRISA DE VOLATILIDAD')
```

Apéndice D. Código en R del Modelo de Heston Aplicando Monte Carlo

```
rm(list=ls())

#### Instalar paquetes ####

install.packages('ESGtoolkit')

install.packages('NMOF')

#### ####

library('ESGtoolkit')

library('NMOF')

#Initial stock price

S0 <- 9408.3

# Number of simulations (feel free to reduce this)

n <- 100000

# Sampling frequency

freq <- "monthly"

# volatility mean-reversion speed

kappa <- 8800.10

# volatility of volatility

volvol <- 36.3195

# Correlation between stoch. vol and spot prices

rho <- -0.9373

# Initial variance

V0 <- 0.9961
```

```
# long-term variance
theta <- 0.9954
#Initial short rate
r0 <- 0.000553778

# Options maturities
horizon <- 15
# Options' exercise prices
strikes <- c(8800.10,8860.60,9102.8)

# Simulation of shocks with given correlation
set.seed (5) # reproducibility seed
Shocks <- Sims hocks(n =  n,
                horizon =  horizon,
                frequency =  freq,
                method = "anti",
                family = 1, par =  rho)

#  Stochastic volatility  simulation
sim.vol <- simdiff(n =  n, horizon =  horizon,
               frequency =  freq, model = "CIR", x0 =  V0,
               theta1 =  kappa*theta, theta2 =  kappa,
```

```
  theta3 =  volvol, eps =  shocks[[1]])


# Stock prices simulation
sim.price <- simdiff(n = n, horizon = horizon,
                     frequency = freq, model = "GBM", x0 = S0,
                     theta1 = r0, theta2 = sqrt(sim.vol),
                     eps = shocks[[2]])
# Stock price at maturity (15 years)
S_T <- sim.price[nrow(sim.price), ]


### Monte Carlo prices
#### Estimated Monte Carlo price
discounted.payoff <- function(x)
{
  (S_T - x)*(S_T - x > 0)*exp(-r0*horizon)
}
mcprices <- sapply(strikes, function(x)
  mean(discounted.payoff(x)))


#### 95% Confidence interval around the estimation
mcprices95 <- sapply(strikes,  function(x)
  t.test(discounted.payoff(x),
        conf.level = 0.95)$conf.int)
```

```
#### 'Analytical' prices given by 'callHestoncf'
pricesAnalytic <- sapply(strikes, function(x)
  callHestoncf(S = S0, X = x, tau = horizon,
             r = r0, q = 0, v0 = V0, vT = theta,
             rho = rho, k = kappa, sigma = volvol))

results <- data.frame(cbind(strikes, mcprices,
                       t(mcprices95), pricesAnalytic))
colnames(results) <- c("strikes", "mcprices", "lower95",
                   "upper95", "pricesAnalytic")

print(results)
```