



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 2

Neiva, 14 de mayo de 2021

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

Diego Armando Girón Murcia, con C.C. No. 1075275996,

Sergio Barrera Santofimio, con C.C. No. 1081516795,

_____, con C.C. No. _____,

_____, con C.C. No. _____,

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado o recopilación bibliográfica

titulado “UNA INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA DE CULTIVOS HIDROPÓNICOS DE LECHUGA”

presentado y aprobado en el año 2021 como requisito para optar al título de

MATEMÁTICO;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

Vigilada Mineducación



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

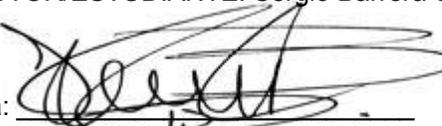
2 de 2

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE: Diego Armando Girón Murcia

Firma: 

EL AUTOR/ESTUDIANTE: Sergio Barrera Santofimio

Firma: 



TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA DE CULTIVOS HIDROPÓNICOS DE LECHUGA

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
GIRÓN MURCIA	DIEGO ARMANDO
BARRERA SANTOFIMIO	SERGIO

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
ESCOBAR FIESCO	GERMÁN FABIÁN
MORALES MOSQUERA	DIEGO ARMANDO

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
POLANIA QUIZA	LUIS ARTURO

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: MATEMÁTICO

FACULTAD: CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

PROGRAMA O POSGRADO: MATEMÁTICA APLICADA

CIUDAD: NEIVA - HUILA **AÑO DE PRESENTACIÓN:** MAYO DE 2021 **NÚMERO DE PÁGINAS:** 56

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

CÓDIGO	AP-BIB-FO-07	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	2 de 3
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

Diagramas Fotografías ___ Grabaciones en discos ___ Ilustraciones en general Grabados ___ Láminas ___ Litografías ___ Mapas ___ Música impresa ___ Planos ___ Retratos ___ Sin ilustraciones ___ Tablas o Cuadros

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: LECTOR DE FORMATO PDF

MATERIAL ANEXO: NA

PREMIO O DISTINCIÓN (En caso de ser LAUREADAS o Meritoria): NA

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

<u>Español</u>	<u>Inglés</u>
1. <u>Sistemas Dinámicos</u>	<u>Dynamic Systems</u>
2. <u>Modelación</u>	<u>Modeling</u>
3. <u>Ecuaciones Diferenciales</u>	<u>Differential Equations</u>
4. <u>Estabilidad de soluciones</u>	<u>Solution stability</u>
5. <u>Hidroponía</u>	<u>Hydroponics</u>

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

Este trabajo de finalización de pregrado es una revisión bibliográfica de algunos modelos de decaimiento exponencial donde se profundiza en el modelo matemático para la dosis de un medicamento suministrado a un paciente (modelo descrito en el libro (Polania, 2011)). Este es una aplicación particular en los medicamentos, que por lo general tienden a presentar un decaimiento en cuanto a la concentración en la sangre, circunstancia que es producto de los procesos de eliminación y desintoxicación propios del cuerpo humano. Considerando esto, en un cultivo hidropónico de lechuga, la concentración de nutrientes en la solución nutritiva se comporta de manera similar. Por consiguiente, la finalidad que se persigue con el siguiente trabajo apunta a identificar las similitudes entre el modelo de la dosis del medicamento y las principales características del cultivo hidropónico mencionado anteriormente. Para alcanzar dicho objetivo, se indaga minuciosamente en el modelo del medicamento, el comportamiento de sus soluciones, y se reúne información sobre la hidroponía.

Por otro lado, se consultan distintos modelos de decaimiento exponencial en demás áreas de las ciencias, y se realiza un paralelo con las variables que intervienen en el crecimiento de lechugas hidropónicas. Como resultado de esto, se obtiene una introducción a la modelación matemática de cultivos hidropónicos de lechuga.



En conclusión, se contempla la existencia de una concentración de minerales que es insuficiente para el crecimiento de la planta, y a su vez, una concentración que determina el límite de tolerancia para la planta antes de intoxicarse.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

This undergraduate completion work is a literature review about some of the exponential decay models, in which the mathematical model for the dose of a drug supplied to a patient (a model described in the book (Polania, 2011)) is studied in depth. That one is a particular application of the exponential model in drugs that generally tend to present decay as to the concentration in the blood, a circumstance produced by the elimination and detoxification processes of the human body. Considering this in a hydroponic lettuce crop, the concentration of nutrients in the nutrient solution behaves similarly. Thus, the purpose of the following work is to identify the similarities between the drug dosage model and the main characteristics of the hydroponic crop mentioned above. In order to achieve this objective, the drug model, the behavior of its solutions, and information on hydroponics are thoroughly investigated.

On the other hand, different models of exponential decay in other areas of science are consulted, and a parallel is made with the variables involved in the growth of hydroponic lettuces. As a result, an introduction to the mathematical modeling of hydroponic lettuce crops is obtained.

In conclusion, the existence of a concentration of minerals that is insufficient for plant growth is contemplated, and in turn, a concentration that determines the tolerance limit for the plant before intoxication.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: Dr. Germán Fabian Escobar Fiesco

Firma:


GERMÁN FABIAN ESCOBAR FIESCO
Jefe de Programa Matemática Aplicada

Nombre Jurado: Mg. Diego Armando Morales Mosquera

Firma:


Mg. DIEGO ARMANDO MORALES MOSQUERA
DOCENTE EVALUADOR DEL TRABAJO
DEPTO. MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA



UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

UNA INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA
DE CULTIVOS HIDROPÓNICOS DE
LECHUGA

TRABAJO DE GRADO

Para obtener el título de
MATEMÁTICO

Presentado por

DIEGO ARMANDO GIRÓN MURCIA
SERGIO BARRERA SANTOFIMIO

Director del trabajo profesor

LUIS ARTURO POLANIA QUIZA



Mayo de 2021
Neiva, Huila

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE MATEMÁTICA APLICADA

**UNA INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA DE CULTIVOS
HIDROPÓNICOS DE LECHUGA**

**Diego Armando Girón Murcia
Sergio Barrera Santofimio**

Mayo de 2021

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE MATEMÁTICA APLICADA

**UNA INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA DE CULTIVOS
HIDROPÓNICOS DE LECHUGA**

Diego Armando Girón Murcia
Sergio Barrera Santofimio

Proyecto de grado presentado para optar al Título Profesional de *Matemático*

Profesor director: *Mag. Luis Arturo Polanía Quiza*

Lectores jurados: *Dr. Germán Fabián Escobar Fiesco*
Mag. Diego Armando Morales Mosquera

Mayo de 2021

Dedicatoria

Este trabajo es la recopilación de 9 años de esfuerzo constante para poder terminar mis estudios en la Usco. Fueron muchos factores que influyeron en mi vida para no terminar antes, pero hoy puedo decir que he adquirido los conocimientos y experiencias necesarios durante mi paso por la universidad; aquí me encuentro ya para graduarme y seguir con mis procesos académicos a futuro. Por esto dedico cada línea escrita en este trabajo a mi madre Norma Constanza Murcia Romero y a mi padre Pablo Emilio Girón Camacho, quienes estuvieron siempre apoyándome tanto económicamente como emocionalmente para poder terminar este proceso; así mismo, lo dedico a mis dos hermanos, Juan Pablo Girón Murcia y Joan Andrés García Murcia, sin sus apoyos incondicionales, no hubiese visualizado este logro que estoy alcanzado. También, dedico este trabajo a mis profesores quienes me estuvieron guiando y apoyando en este largo proceso. Dedico este trabajo a todos los que me apoyaron para no abandonar esto a último momento.

Diego Armando Girón Murcia.

Dedico este trabajo a mis padres, Victoriano Barrera y Deyanira Santofimio, sin sus apoyos no hubiese alcanzado este logro para mi vida; también este esfuerzo se lo dedico a todas aquellas personas, amigos, compañeros, familiares y profesores quienes me acompañaron en esta misión.

Sergio Barrera Santofimio.

Agradecimientos

Agradecemos a Dios y nuestros padres por el apoyo y amor que nos brindaron para terminar este proyecto, para que cada día se adelantaran avances y desarrollos del mismo. Agradecimiento total al profesor Mg. Luis Arturo Polanía por la claridad, pertinencia y pedagogía con la que enseñó cada clase, discurso y lección. Damos las gracias a los compañeros mosqueteros que nos ayudaron en los diálogos y discusiones sobre este tema de los sistemas dinámicos y la modelización. A todos los que nos acompañaron en este proceso formativo, académico e integral, les damos infinitas gracias.

Resumen

Este trabajo de finalización de pregrado, es una revisión bibliográfica de algunos modelos de decaimiento exponencial donde se profundiza en el modelo matemático para la dosis de un medicamento suministrado a un paciente (modelo descrito en el libro Polanía (2011)). Este es una aplicación particular en los medicamentos, que por lo general tienden a presentar un decaimiento en cuanto a la concentración en la sangre, circunstancia que es producto de los procesos de eliminación y desintoxicación propios del cuerpo humano. Considerando esto, en un cultivo hidropónico de lechuga, la concentración de nutrientes en la solución nutritiva se comporta de manera similar. Por consiguiente, la finalidad que se persigue con el siguiente trabajo apunta a identificar las similitudes entre el modelo de la dosis del medicamento y las principales características del cultivo hidropónico mencionado anteriormente. Para alcanzar dicho objetivo, se indaga minuciosamente en el modelo del medicamento, el comportamiento de sus soluciones, y se reúne información sobre la hidroponía.

Por otro lado, se consultan distintos modelos de decaimiento exponencial en demás áreas de las ciencias, y se realiza un paralelo con las variables que intervienen en el crecimiento de lechugas hidropónicas. Como resultado de esto, se obtiene una introducción a la modelación matemática de cultivos hidropónicos de lechuga.

En conclusión, se contempla la existencia de una concentración de minerales que es insuficiente para el crecimiento de la planta, y a su vez, una concentración que determina el límite de tolerancia para la planta antes de intoxicarse.

Palabras claves: Modelo matemático, hidroponía, concentración inicial, estabilidad de soluciones, soluciones nutritivas.

Abstract

This undergraduate completion work is a literature review about some of the exponential decay models, in which the mathematical model for the dose of a drug supplied to a patient (a model described in the book [Polanía \(2011\)](#)) is studied in depth. That one is a particular application of the exponential model in drugs that generally tend to present decay as to the concentration in the blood, a circumstance produced by the elimination and detoxification processes of the human body. Considering this in a hydroponic lettuce crop, the concentration of nutrients in the nutrient solution behaves similarly. Thus, the purpose of the following work is to identify the similarities between the drug dosage model and the main characteristics of the hydroponic crop mentioned above. In order to achieve this objective, the drug model, the behavior of its solutions, and information on hydroponics are thoroughly investigated.

On the other hand, different models of exponential decay in other areas of science are consulted, and a parallel is made with the variables involved in the growth of hydroponic lettuces. As a result, an introduction to the mathematical modeling of hydroponic lettuce crops is obtained.

In conclusion, the existence of a concentration of minerals that is insufficient for plant growth is contemplated, and in turn, a concentration that determines the tolerance limit for the plant before intoxication.

Keywords: Dynamic system, mathematical model, hydroponics, initial concentration, stability, nutrient solutions.

Índice general

1	Descripción del trabajo y preliminares	2
1.1	Algunas referencias, notas históricas.	2
1.2	Objetivo general	3
1.3	Objetivos específicos	3
2	Modelo matemático para la dosis de un medicamento suministrado a un paciente	5
2.1	Modelación matemática	5
2.2	Modelo matemático de la dosis para cierto medicamento.	9
2.2.1	Necesidad del modelo	9
2.2.2	Submodelo para la tasa de eliminación de un medicamento	11
2.2.3	Submodelo para la tasa de asimilación de un medicamento	12
2.2.4	Acumulación de una droga con repetidas dosis	13
2.2.5	Determinación del programa de dosis	15
2.2.6	Revisión intuitiva del modelo	17
2.3	Liberación de medicamentos en la sangre	18
2.3.1	Relación cuerpo-medicamento	20
2.4	Otras aplicaciones del modelo	20
2.4.1	Desintegración radiactiva	20
2.4.2	Enfriamiento de Newton	22
2.4.3	Absorción de Lambert	24
2.4.4	Otro modelo para la propagación de una medicina	26
3	Características de los cultivos hidropónicos de lechuga y sus nutrientes	27
3.1	¿Qué es un cultivo hidróponico?	27
3.2	Absorción de nutrientes en la planta de lechuga	28
3.2.1	El agua como componente fundamental	29
3.3	La solución nutritiva para el cultivo.	31
3.4	La concentración ideal de la solución	33
3.4.1	Construcción de soluciones nutritivas	35
3.5	Similitudes entre las características básicas de los nutrientes en el cultivo hidropónico y las principales cualidades de los medicamentos en la sangre	35
4	Preliminares del modelo para la concentración de minerales en un cultivo hidropónico de lechuga	37
4.1	Absorción del sodio	38

4.2 Comparación entre el modelo de la dosis de un medicamento para un paciente y el comportamiento de la solución nutritiva en un cultivo hidropónico de lechuga	39
5 Conclusiones	41
Referencias	41
6 Bibliografía complementaria	44



Índice de tablas

Tabla 2.2.1 Residuos en tiempo T	14
Tabla 2.2.2 Constante de eliminación k para algunos medicamentos	17
Tabla 3.2.1 Minerales necesarios para la formación de la planta.	29
Tabla 3.4.1 Especificaciones para la lechuga	34

Índice de figuras

Figura 2.1.1 Los pasos para la construcción de modelos matemáticos	6
Figura 2.1.2 Comportamiento de la función exponencial de base e	7
Figura 2.1.3 Comportamiento de $C(t)$ para los casos distintos de k	8
Figura 2.1.4 Comportamiento cualitativo de $\frac{dC}{dt} = -kC$	9
Figura 2.2.1 Disminución de la concentración C en sangre transcurrido t horas	10
Figura 2.2.2 Concentración C_0 en el tiempo T , significa que: la concentración residual de las dosis anteriores es aproximadamente nula cuando es eliminada completamente del cuerpo.	10
Figura 2.2.3 Decrecimiento a partir de la concentración inicial C_0	12
Figura 2.2.4 Posible efecto de la repetición de dosis iguales.	13
Figura 2.2.5 Concentración como área bajo la curva	16
Figura 2.2.6 Decaimiento de la concentración transcurrido t	18
Figura 2.3.1 Formas de liberación de un fármaco o medicamento	19
Figura 2.3.2 Comportamiento del medicamento suministrado de forma convencional	19
Figura 2.4.1 Decrecimiento de $T_p(t)$	23
Figura 2.4.2 Rayo de luz que atraviesa el material traslucido.	25
Figura 2.4.3 Comportamiento de r/k	26
Figura 3.1.1 Sistema hidropónico NFT	28
Figura 3.2.1 Acuaporina Beltrano (2015) (p.40)	31
Figura 3.3.1 Accionar de los estomas (Recuperado de: lifeder.com)	32

Capítulo 1

Descripción del trabajo y preliminares

1.1. Algunas referencias, notas históricas.

“No hay rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real”.

Nikolay Lobachevsky.

Un sistema dinámico es una tripleta (T, X, F) donde T es la variable temporal, X es el conjunto de los posibles estados del sistema y F es el operador de evolución o ley de transición de estado, en otras palabras es un modelo matemático para estudiar procesos iterativos de naturaleza determinista o aleatoria donde todo proceso ocurre en su propio tiempo ya sea discreto o continuo, con tendencia hacia puntos de equilibrios; puntos fijos; ciclos u orbitas cerradas y atractores (para el caso de los fractales).

Aracil (2007) afirma: “El concepto de sistema dinámico se origina en la mecánica clásica para describir como se produce la variación de la posición y la velocidad de las partículas materiales en función de las fuerzas que se producen en ellas”(p.17). El modelo matemático para la dosis de un medicamento suministrado a un paciente descrito en el libro Polanía (2011) es un sistema dinámico unidimensional y determinista en tiempo continuo que modela la variación de la concentración de la medicina en la sangre donde su comportamiento tiende a decaer hasta ser casi nula, asimismo la concentración de nutrientes necesarios en el cultivo hidropónico se va haciendo cada vez más pequeña al ser capturados por la planta en su desarrollo.

Desde los tiempos de la antigua Babilonia, el cultivo sobre agua se desarrolló tecnológicamente primero que el cultivo en suelo. Se utilizó principios hidropónicos en el desarrollo agrícola del imperio chino, el imperio mongol, el imperio egipcio, el imperio maya y el imperio azteca. Los vestigios del uso de esta práctica se encontraron en los restos arqueológicos de estas culturas antiguas, esto fue un impulso para las investigaciones científicas en esta área.

El primer trabajo científico sobre el crecimiento de cultivos hidropónicos fue realizado por Sir Francis Bacon registrado en el libro *Sylva Sylvarum, Or, A Naturall Historie: In Ten Centuries* en 1627, luego años más adelante el profesor de la Universidad de Cambridge John Woodward continuo con parte de ese trabajo. Ya por 1842 Jean Baptiste Boussingault validó los estudios de Nicolás de Saussure donde encontró los elementos esenciales para el crecimiento de plantas en la agricultura.

El estudio del modelo exponencial va avanzando a la par de la teoría de los sistemas dinámicos cuya formulación está basada en un problema de valor inicial de un ecuación diferencial ordinaria de primer orden lineal homogénea propuesta en el siglo XIX por Thomas Robert Malthus. Entre los fenómenos que describen un comportamiento exponencial decreciente se encuentran: La velocidad de una partícula sobre un fluido en reposo sobre la cual no actúan fuerzas externas, el número de átomos de una sustancia radioactiva al pasar cierto periodo de tiempo y la probabilidad de supervivencia de ciertas especies cuando tienen limitaciones de recursos, solo por nombrar algunos. En la actualidad es muy utilizado para ejemplificar el proceso de modelación matemático.

Este trabajo inicia en el capítulo 2 con una breve descripción del proceso de modelación matemático, por ende se plantea los principales aspectos necesarios para ser formulado, de igual modo, se introduce nociones elementales de los puntos de equilibrio existentes en el modelo exponencial, también se expone el comportamiento de la solución analítica a dicho modelo. Seguido, en este capítulo se desarrolla paso a paso todo lo referente al modelo del medicamento en pacientes; se construye el modelo partiendo de la hipótesis de que la concentración de la dosis debe estar en un intervalo para que sea segura y efectiva. Por último, se recopilan otros modelos de decaimiento exponencial con su respectivo análisis.

En el capítulo 3, llamado características de los cultivos hidropónicos de lechuga y sus nutrientes, se resumen los aspectos más relevantes en el desarrollo de un cultivo hidropónico. En el capítulo 4, se realiza la comparación entre el comportamiento de los medicamentos en la sangre, y el comportamiento de los nutrientes en un cultivo hidropónico de lechuga. Finalmente, en el capítulo 5, a modo de conclusión se resume la información más relevante de este trabajo de recopilación bibliográfica, y se deja la puerta abierta para futuros trabajos de investigación. Con base a lo contextualizado anteriormente la pregunta problema que se plantea para este trabajo de finalización de pregrado es:

¿Existe alguna similitud entre el modelo matemático de la dosis de un medicamento suministrado a un paciente y el comportamiento de los nutrientes en el cultivo hidropónico de lechuga?

1.2. Objetivo general

Identificar la similitud entre el modelo matemático de la dosis de un medicamento suministrado a un paciente y la administración de nutrientes en un cultivo hidropónico de lechuga.

1.3. Objetivos específicos

1. Estudiar las variables que intervienen en el modelo matemático de la dosis de medicamento suministrado a un paciente.



2. Consultar los modelos de Desintegración Radioactiva, Enfriamiento de Newton, Absorción de Lambert y Propagación de una medicina; para encontrar las similitudes con el modelo de la dosis de un medicamento suministrado a un paciente.
3. Realizar la analogía entre el modelo de la dosis de un medicamento y el cultivo hidropónico de lechuga.



Capítulo 2

Modelo matemático para la dosis de un medicamento suministrado a un paciente

En el siguiente capítulo se hace un estudio analítico del modelo de decaimiento exponencial para la concentración en la sangre de un medicamento suministrado a un paciente. Como conducta de entrada se reúne información sobre la modelación matemática, luego se resalta las características principales del modelo de crecimiento exponencial; su estabilidad y su solución.

2.1. Modelación matemática

En primer lugar un modelo científico es una representación simplificada de un fenómeno que ocurre dentro de un sistema natural o artificial, por otra parte, los modelos matemáticos están clasificados y definidos como lo exponen [Thornley and Johnson \(2000\)](#) citado en [Cruz \(2005\)](#) de la siguiente manera:

En general existen tres tipos de modelos matemáticos: modelos empíricos, modelos mecanicistas y modelos teleonómicos. Los modelos empíricos son descripciones directas de datos y proporcionan relaciones observables entre las variables de un sistema o fenómeno, sin proporcionar alguna explicación de los mecanismos subyacentes. Estos modelos son un poderoso medio para describir y resumir datos, ejemplos de ellos son los modelos de regresión simple y regresión múltiple, redes neuronales, modelos difusos o modelos neuro-difusos. Los modelos teleonómicos son aplicables a comportamientos dirigidos por metas y se formulan explícitamente en términos de objetivos. Los modelos explicativos o mecanicistas generalmente son modelos determinísticos. Normalmente, un modelo mecanicista es definido mediante un conjunto o sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no-lineales, las cuales describen el comportamiento de las variables de estado del sistema, aquellas variables que representan las propiedades relevantes o atributos del sistema considerado. Los modelos explicativos son más apropiados para expresar hipótesis matemáticamente y proporcionan así una descripción cuantitativa y una explicación de los procesos más importantes que ocurren en un sistema biológico.

(...) El desarrollo de un modelo matemático mecanicista requiere de suficiente comprensión de los procesos biológicos, fisiológicos, químicos y físicos de un sistema biológico. El uso de un modelo mecanicista demanda análisis, calibración y validación apropiados. (p.257)

Aquí se introduce un concepto para este trabajo y es el concepto de sistema dinámico que en lenguaje coloquial es un conjunto de elementos u objetos que tienen características en común y que obedecen una ley llamada ley de transición de estados del sistema. El sistema dinámico que se plantea para el modelo que se trabaja en este documento es el modelo exponencial para crecimiento ilimitado de poblaciones (Malthus), con la diferencia de que en este caso se toma el término exponencial como negativo convirtiendo la solución del modelo en una función que describe una curva exponencial decreciente.

Cabe mencionar que el modelo matemático abarca menos información que el sistema real y solo contiene las características más relevantes de él. Por lo anterior al formularse un modelo matemático hidropónico este tendría gran cantidad de variables y parámetros lo cual describiría un comportamiento complejo. En este documento se hace énfasis en la concentración de nutrientes con respecto al número de plantas.

Un proceso de modelación matemático rodea básicamente 3 aspectos que se entienden como fundamentales, esto son:

1. Caracterizar el sistema: Se hace una descripción del sistema y se encuentran las relaciones entre variables, variables y parámetros o en algunos casos entre solamente parámetros.
2. Construir la formulación matemática: En caso de que el comportamiento al pasar el tiempo sea discreto es una ecuación en diferencias y en el caso continuo es una ecuación diferencial.
3. Relacionar el objeto matemático construido con las características del sistema.

Por otra parte los pasos que se deben de tener en cuenta para llegar a la construcción de un modelo matemático son:

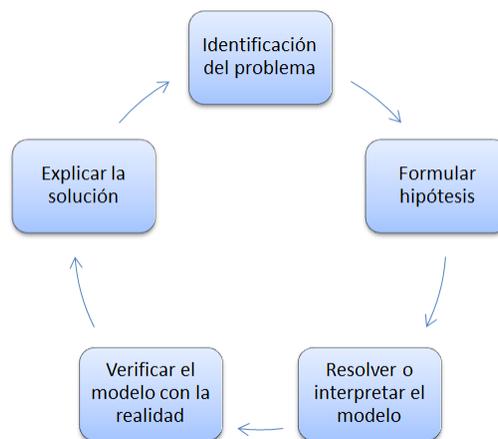


Figura 2.1.1: Los pasos para la construcción de modelos matemáticos



En cuanto a las similitudes entre el cultivo hidrópico y la concentración de medicamentos en sangre, se plantea que la dosis de minerales y el tiempo de aplicación debe estar en cierto intervalo de tiempo donde las variables temporales t y T permiten controlar el decaimiento de concentración. También es de importancia tener en cuenta el ciclo de transformación de la materia prima que utilizan las plantas para producir su alimento (fotosíntesis) ya que se alteraría de cierta forma este ciclo por disponer de manera directa el alimento. El objeto matemático que permite estudiar y conocer cada cuanto sube o cae una dosis en un tiempo t , ó, T son la ecuaciones diferenciales y como caso particular las ecuaciones diferenciales autónomas, las cuales fueron diseñadas para describir situaciones y fenómenos del mundo real. Para ello se utiliza la derivada de primero orden para construir cualquier situación en donde se presente una tasa de cambio. Polanía (2011) afirma: “Estos modelos se deducen partiendo del hecho de que algún cambio observado es proporcional a la variable dependiente o función”(p.26).

El modelo matemático que se va a tratar tiene la forma: $\frac{dx}{dt} = f(x)$ donde el lado derecho de la ecuación es una función que depende solo de x , esta es conocida como una ecuación diferencial autónoma. Este es el caso del modelo $\frac{dC}{dt} = -kC$ el cual es análogo al de Thomas Malthus $\frac{dp}{dt} = kp$ donde si $t \rightarrow \infty$ la función solución $P(t)$ crece indefinidamente de forma exponencial. Se sabe que $P(t) = Ce^{kt}$ es la solución a la ecuación de Malthus y geoméricamente se interpreta como muestra la curva azul en la Figura 2.1.1 y la curva roja es el caso para la potencia negativa. Hay que recordar que una ecuación diferencial tiene infinitas soluciones hasta que se especifique una condición inicial en este caso C_0

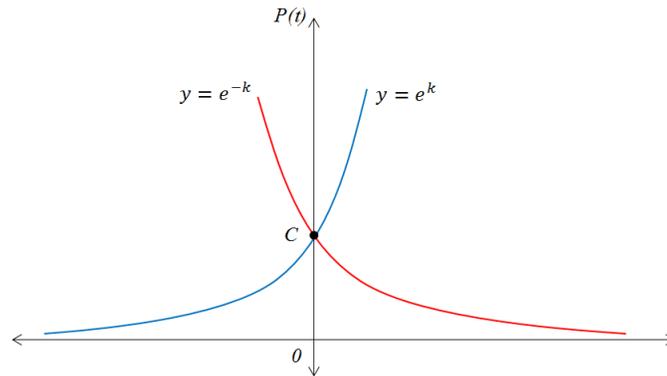


Figura 2.1.2: Comportamiento de la función exponencial de base e

El modelo de Malthus $\frac{dC}{dt} = kC$ estudia la evolución de una determinada especie. El C que aparece en la ecuación es el número de individuos de la población en el instante de tiempo t . La ecuación fue propuesta en el siglo XIX para estimar la evolución de la población humana. Si $k > 0$ y $C(t_0) > 0$ se tiene que $\frac{dC}{dt} = kC(t_0) > 0$ en el tiempo $t = t_0$, esto quiere decir que la población esta creciendo.

Si $C(t_0) \neq 0$ en algún tiempo t_0 , entonces en el tiempo $t = t_0$

$$\frac{dC}{dt} = kC(t_0) \neq 0$$

Conforme t aumenta, la función $C(t)$ aumenta entonces $\frac{dC}{dt}$. Una característica importante es que $C(t)$ como se observa crece rápidamente. La velocidad de $\frac{dC}{dt}$ crece de manera directa con la población.



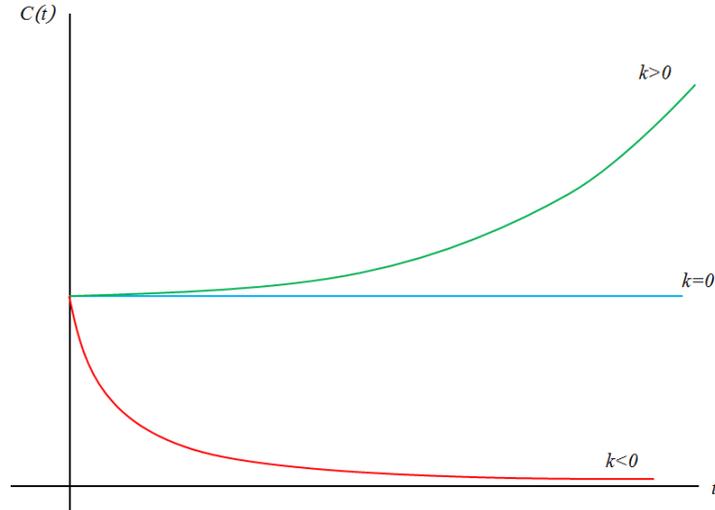


Figura 2.1.3: Comportamiento de $C(t)$ para los casos distintos de k

Para las soluciones numéricas de las ecuaciones diferenciales es necesario introducir lo que define el autor López (2018) a continuación:

En la resolución de ecuaciones diferenciales, pero sobre todo cuando se utilizan métodos numéricos, hay que introducir al principio lo que se denominan “valores iniciales”. Corresponden al tiempo “teóricamente cero” una vez es administrado el medicamento. En los casos de usar la vía intravasal (venosa o arterial) se entiende que el fármaco ya se ha repartido instantáneamente por todo su volumen central de distribución. Cuando la administración es por vía extravasal, los valores iniciales suelen ser cero, ya que no hay tiempo para dicha distribución. Para obtener resultados habrá que introducir posteriormente valores de la variable independiente, a medida que el ordenador los vaya solicitando, y que permitirán conocer los correspondientes valores de la variable dependiente (o de varias variables dependientes en su caso). En algunos tipos de ecuaciones se pueden solicitar los llamados valores frontera. (p.61)

En el modelo del medicamento existe la presencia de submodelos, esto ocurre cuando una o varias variables se estudian de forma separada. De acuerdo al modelo de Malthus la razón con que la concentración de minerales decrece en cierto periodo de tiempo es directamente proporcional a los residuos que permanecen en el sistema hidropónico. La eliminación de un medicamento en la sangre puede darse por excreción o metabolización según el ciclo biológico del cuerpo humano, de manera similar ocurre con la planta cuando captura su alimento desde la solución de nutrientes.

Haciendo una analogía con el modelo de crecimiento exponencial la función constante $C(t) = 0$ es una solución de equilibrio para el modelo de la dosis de un medicamento, esto quiere decir en términos del modelo que no hay presencia alguna de concentración en la sangre. $C(t_0) \neq 0$ en un instante t_0 cualquiera, entonces $t = t_0$, lo que lleva a que $\frac{dC}{dt} = -kC(t_0) \neq 0$, esto quiere decir que la concentración no es constante. Analizando esta expresión como $k > 0$ y si $C(t_0) > 0$ tenemos como consecuencia que $\frac{dC}{dt} = -kC(t_0) < 0$ que dice que en $t = t_0$ la concentración está decreciendo como se supone debe de hacerlo. De acuerdo a esto cuando t crece $C(t)$ se vuelve pequeño por lo que dC/dt disminuye.



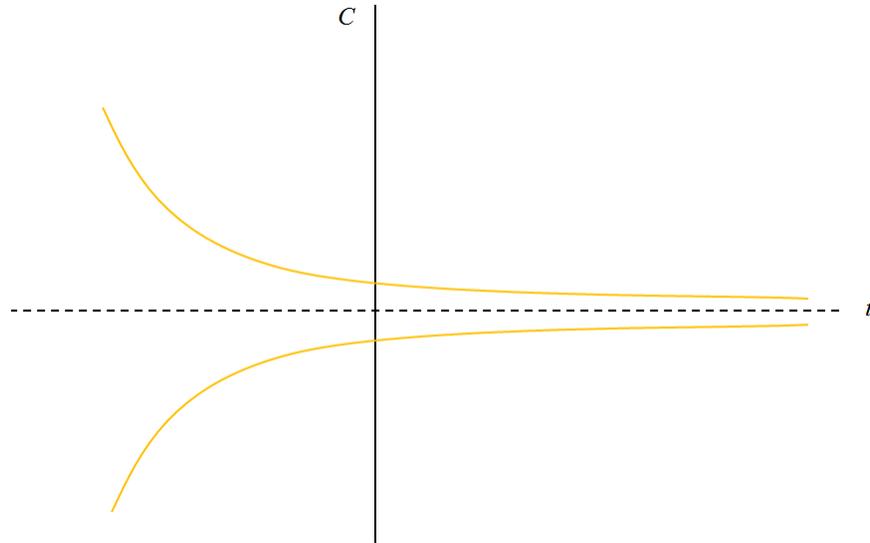


Figura 2.1.4: Comportamiento cualitativo de $\frac{dC}{dt} = -kC$

2.2. Modelo matemático de la dosis para cierto medicamento.

Este modelo se encuentra en el libro [Polanía \(2011\)](#). Es un modelo exponencial decreciente que encuentra una expresión matemática para preceptuar la concentración inicial de un determinado medicamento a un paciente, como también propone el periodo de tiempo en el cual debe de suministrarse la dosis nueva que depende de la concentración inicial.

2.2.1. Necesidad del modelo

Saber que concentración de dosis de cierto medicamento se debe disponer a un paciente y la frecuencia con la que hay que suministrarla es un problema muy importante en farmacología. Resulta que para la mayoría de los medicamentos hay una concentración por debajo de la cual es ineficaz y una concentración que por encima de la cual se corre el riesgo de daños por efectos adversos producto de la elevada concentración. En efecto, se identifica el problema formulado en la siguiente pregunta: ¿Cómo puede ajustarse la dosis y el tiempo entre dosis para mantener una concentración segura pero efectiva del medicamento en la sangre?

Para encontrar respuesta a la cuestión anterior se parte de que la concentración del medicamento en la sangre es el resultado de aplicar una simple dosis, la cual decrece con el paso del tiempo cuando es eliminada del cuerpo pero en dicho proceso quedan algunos residuos. El interés está en lo que le ocurre a la concentración del medicamento en la sangre cuando la dosis se suministra en intervalos de tiempo predefinidos.

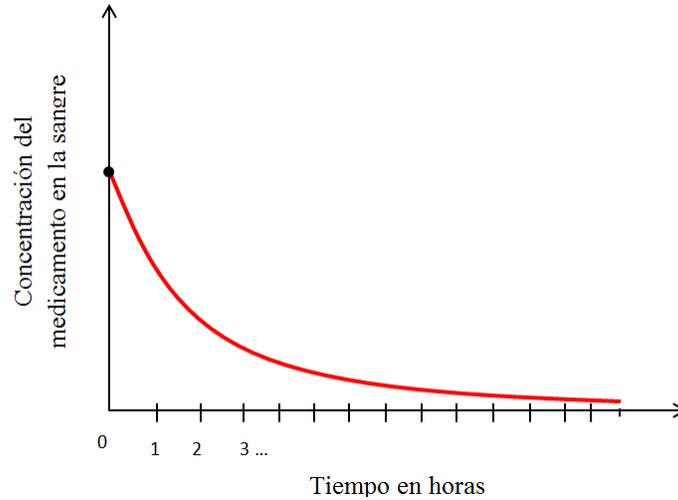


Figura 2.2.1: Disminución de la concentración C en sangre transcurrido t horas

Si H denota el nivel más alto y seguro de la dosis de medicamento y L el nivel más bajo efectivo, sería imprescindible determinar una dosis C_0 con tiempo T entre dosis de manera que la concentración en el torrente sanguíneo permanezca en $[L, H]$ para cada periodo entre dosis. Al considerarse varias formas en las que el medicamento podría administrarse, el tiempo entre dosis es tal que la droga no se acumula en el sistema, es decir ocurre una eliminación total o una desintoxicación. Gráficamente ocurriría lo siguiente

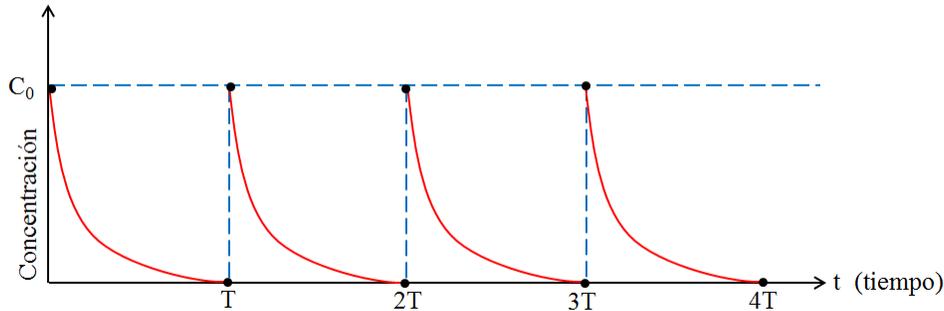


Figura 2.2.2: Concentración C_0 en el tiempo T , significa que: la concentración residual de las dosis anteriores es aproximadamente nula cuando es eliminada completamente del cuerpo.

Con respecto al intervalo entre dosis de la cantidad proveída, la tasa de decaimiento de la concentración $C(t)$ genera residuos en cada instante en el que se dispone el medicamento al paciente. El nivel de la concentración residual parece acercarse a un límite luego el interés es determinar si esta situación ocurre efectivamente y si es así, cuál debe ser ese límite. El objetivo final en la dosis del medicamento es determinar la cantidad y los intervalos entre dosis de modo que el nivel más bajo de eficacia L se alcance rápidamente y la concentración este siempre en $[L, H]$. Primero se encuentra el limite residual que depende de la hipótesis de la tasa de asimilación del medicamento en la sangre y la tasa de crecimiento después de asimilarla.



Hipótesis: Para resolver el problema que se identifica, se considera los factores que determinan la concentración $C(t)$ del medicamento en la sangre en cualquier instante t . Se empieza con $C(t) = f$ (donde esa f puede ser: tasa de eliminación, tasa de asimilación, cantidad de dosis, intervalo entre dosis, ...), y otros factores como el peso corporal y volumen de sangre. Para simplificar la hipótesis se supone que el peso del cuerpo y el volumen de sangre son constantes (sea una medida de un específico grupo de edad) y que el nivel de concentración es el factor crítico en la determinación del efecto del medicamento.

2.2.2. Submodelo para la tasa de eliminación de un medicamento

¿El modelo de donde sale ?

Como ya se sabe que la concentración C en el instante t vienen representada por $C(t)$, el problema ahora es encontrar la concentración que va haber en algún tiempo futuro.

$C(t + \Delta t)$ siendo Δt : variación del tiempo

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t}$$

la expresión anterior es la tasa promedio de cambio, donde ΔC es el decrecimiento de la concentración en el tiempo Δt

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} = \frac{dC}{dt} = -kC(t)$$

Por otra parte, se considera la eliminación de la dosis del medicamento en el cuerpo. Probablemente este es un modelo discreto pero se aproxima por una función continua. Los experimentos clínicos han revelado que el decrecimiento en la concentración del medicamento en la sangre es proporcional a la concentración misma. Matemáticamente, esta hipótesis significa que si la concentración del medicamento en la sangre en el instante t en una función diferenciable $C(t)$, entonces $C'(t) = -kC(t)$. En esta fórmula k es una constante positiva, llamada constante de eliminación del medicamento. Obsérvese que $C'(t)$ es negativa, luego todo $C'(t) < 0$, esto describe un decrecimiento de la concentración en el instante t . Normalmente las cantidades en la ecuación $C'(t) = -kC(t)$ se miden de la siguiente forma: el tiempo t viene expresado en horas, $C(t)$ en miligramos de mililitros de sangre mg/ml , $C'(t)$ es $mg(ml)^{-1}$. Suponiendo que las concentraciones H y L pueden determinarse experimentalmente para la población dada tal como un grupo de edad. Entonces se establece la concentración del medicamento para una dosis al nivel $C_0 = H - L$.

Se supone que C_0 es la concentración en $t = 0$, entonces se tiene el modelo $\frac{dC}{dt} = \frac{dC(t)}{dt} = C'(t) = -kC(t)$.

En términos más simples $\frac{dC}{dt} = -kC$, $C(0) = C_0$. El valor inicial C_0 es la cantidad o concentración que debe proporcionarse al paciente al inicio del tratamiento. La solución analítica de está ecuación diferencial por el método de separación de variables es la siguiente

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= -kC \\ \int \frac{dC}{C} &= \int -k dt \end{aligned}$$



$$\ln |C| = -k \int dt$$

$$\ln |C| = -kt + g$$

$$e^{\ln |C|} = e^{-kt+g}$$

$$C(t) = e^{-kt} g$$

De aquí la solución particular al problema de valor inicial es la función $C(t) = C_0 e^{-kt}$ y el límite $\lim_{t \rightarrow \infty} C_0 e^{-kt} = 0$ permite predecir que la concentración tiende a desaparecer después de un periodo de tiempo considerable, esto dependiendo del tipo de medicamento que se proporciona al paciente y el método de suministrarlo según la farmacocinética. El decrecimiento de la concentración de medicamento es directamente proporcional a la concentración y a la constante de eliminación de la misma en el organismo. k depende de factores como la edad, el peso, la fisiología,...etc.

En cuanto a los equilibrios

$$\frac{dC}{dt} = 0 \iff -kC = 0$$

como $k > 0$, entonces, $C = 0$ con $C = C(t)$. Entonces un punto de equilibrio en la ecuación del modelo es $C = 0$, este es una concentración de equilibrio.

Para la estabilidad $g(C) = -kC$

$$g'(C) = -k$$

$$g'(C^*) = -k \text{ derivada calculada en el punto de equilibrio } C^* = 0$$

$g'(0) = -k$ con $k > 0$, entonces, $g'(C) < 0$, el punto de equilibrio es estable según Lyapunov, quiere decir que la solución en este punto decrece.

La gráfica siguiente muestra la eliminación de concentración de drogas en el tiempo

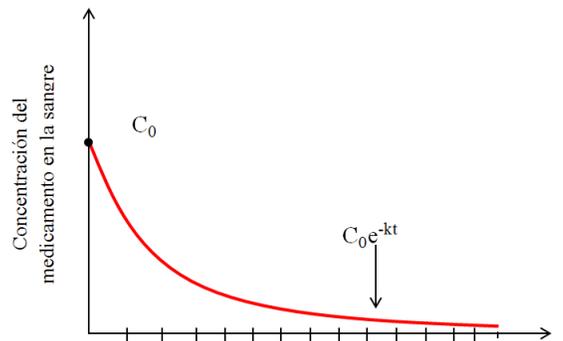


Figura 2.2.3: Decrecimiento a partir de la concentración inicial C_0

2.2.3. Submodelo para la tasa de asimilación de un medicamento

Ya se sabe que la concentración del medicamento decrece con el tiempo pero también aumenta otra vez cuando se proporciona nuevamente al paciente. La hipótesis inicial es que cuando se suministra el medicamento, este se propaga tan rápidamente por la sangre que el gráfico de la concentración es casi vertical. Es decir, hay un



aumento instantáneo de la concentración del medicamento. Esta hipótesis falla para un medicamento que se proporciona a un paciente por vía oral o inyectado directamente en la sangre.

2.2.4. Acumulación de una droga con repetidas dosis

Se considera lo que ocurre con la concentración $C(t)$ cuando una dosis inicial $C_0 \left(\frac{mg}{ml}\right)$ es cada vez proporcionada al paciente en intervalos de tiempo fijos de longitud T . Se supone que en el instante $t = 0$ se proporciona la primera dosis y de acuerdo con el modelo $C(t) = C_0 e^{-kt}$ después de T horas la concentración ha caído hasta la concentración residual $R_1 = C_0 e^{-kT}$ que permanece en la sangre, y entonces se proporciona la segunda dosis. Por la hipótesis referente al aumento en la concentración del medicamento, el nivel de concentración instantáneo salta a $C_1 = C_0 + C_0 e^{-kT}$. Después de otras T horas el nuevo residuo de medicamento que permanece en el cuerpo es de la forma $R_2 = C_1 e^{-kT} = C_0 e^{-kT} + C_0 e^{-2kT}$. La posibilidad de acumulación de medicamento que permanece en la sangre es descrita por la gráfica siguiente

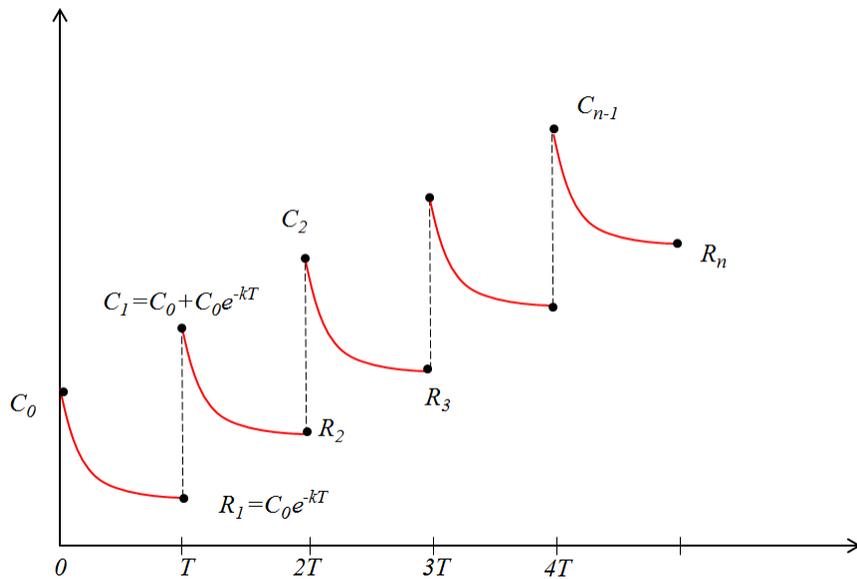


Figura 2.2.4: Posible efecto de la repetición de dosis iguales.



Cálculo de la concentración residual de una droga haciendo el término $r = e^{-kT}$

Concentración	Residuo
$C_0 = C_0$	0
$C_1 = C_0 + C_0e^{-kT}$	$R_1 = C_0e^{-kT}$
$C_2 = C_0 + C_0e^{-kT} + C_0e^{-2kT}$	$R_2 = C_0e^{-kT} + C_0e^{-2kT}$
$C_3 = C_0 + C_0e^{-kT} + C_0e^{-2kT} + C_0e^{-3kT}$	$R_3 = C_0e^{-kT} + C_0e^{-2kT} + C_0e^{-3kT}$
\vdots	\vdots
$C_{n-1} = C_0 + R_{n-1}$	$R_{n-1} = C_0e^{-kT} + \dots + C_0e^{-(n-1)kT}$
$C_n = C_0 + \underbrace{C_0e^{-kT} + C_0e^{-2kT} + \dots + C_0e^{-nkT}}_{R_n}$	$R_n = C_0e^{-kT} + C_0e^{-2kT} + \dots + C_0e^{-nkT}$
$C_n = C_0 + R_n$	

Tabla 2.2.1: Residuos en tiempo T

De la tabla anterior se deduce que

$$\begin{aligned}
 R_n &= C_0 + C_0e^{-kT} + C_0e^{-2kT} + \dots + C_0e^{-nkT} \\
 &= C_0e^{-kT} [1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}] \\
 &= C_0e^{-kT} \left[\sum_{i=0}^{n-1} r^i \right] \\
 S_{n-1} &= r^0 + r^1 + r^2 + \dots + r^{n-1} \\
 r \cdot S_{n-1} &= r^1 + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} + r^n \\
 S_{n-1} - r \cdot S_{n-1} &= S_{n-1}[1 - r] \\
 S_{n-1}[1 - r] &= 1 - r^n \\
 S_{n-1} &= \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} - \frac{r^n}{1 - r}; \quad |r| < 1 \iff -1 < r < 1 \checkmark
 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
 R_n &= C_0e^{-kT} \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r} \\
 &= C_0e^{-kT} \cdot \frac{1 - (e^{-kT})^n}{1 - (e^{-kT})} = \frac{C_0e^{-kT}}{1 - (e^{-kT})} - \frac{C_0e^{-kT} \cdot e^{-nkT}}{1 - (e^{-kT})} \\
 &= \frac{\frac{C_0}{e^{kT}}}{1 - (e^{-kT})} - \frac{C_0 \frac{1}{e^{kT}} \cdot e^{-nkT}}{1 - (e^{-kT})} \\
 &= \frac{C_0}{e^{kT} - 1} - \frac{C_0e^{-nkT}}{e^{kT} - 1}
 \end{aligned}$$

Al calcular el límite de esta expresión

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{C_0}{e^{kT} - 1} - \frac{C_0e^{-nkT}}{e^{kT} - 1} \right]^0$$

Obsérvese que e^{-nkT} tiende a cero cuando n crece, y en consecuencia

$$R = \frac{C_0}{e^{kT} - 1} \tag{2.1}$$



Resumiendo, si una dosis de $C_0 \left(\frac{mg}{ml}\right)$ se repite en intervalo de T horas, entonces el valor límite R de la concentración residual viene dado por (2.1). Si el límite de la suma R_n tiende a cero, entonces cada término de R_n tiende a cero, lo que quiere decir que la concentración residual para cada aplicación es nula. El número k es la constante de eliminación del medicamento.

2.2.5. Determinación del programa de dosis

En la tabla anterior se observa que la concentración de medicamento C_n al principio del n -ésimo intervalo viene dada por $C_n = C_0 + R_n$. Ahora, para que el nivel de dosis deseado se acerque al nivel de seguridad más alto H , entonces es necesario que C_n se acerque a H para los valores grandes de n . Es decir,

$$H = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (C_0 + R_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = C_0 + R$$

$$H = C_0 + R$$

Combinando este resultado con $C_0 = H - L$ se obtiene $H - R = C_0 = H - L$ con lo cual $R = L$. Para examinar lo que ocurre con la concentración residual R para diferentes intervalos T entre dosis se compara R con C_0 , este es el cambio en la concentración como resultado de cada dosis. Para hacer esta comparación hay que considerar

$$\frac{R}{C_0} = \frac{\frac{C_0}{e^{kT} - 1}}{\frac{C_0}{1}} = \frac{C_0}{C_0(e^{kT} - 1)} = \frac{1}{e^{kT} - 1}$$

Aquí $\frac{R}{C_0} \rightarrow 0$ cuando $e^{kT} \rightarrow \infty$, esto quiere decir que e^{kT} crece indefinidamente de tal manera que $(e^{kT} - 1)$ sea suficientemente grande, esto ocurre obviamente cuando el T es grande.

Como

⋮

$$R_{n-1} = R_{n-2} + C_0 e^{-(n-1)kT}$$

$$R_n = R_{n-1} + C_0 e^{-nkT}, \text{ para todo } n \in I$$

Donde cada $R_n > 0$ y $R_n < R$, para todo $n \in I$.

Respecto a la dosis del medicamento esto significa que cuando $R \rightarrow 0$, las concentraciones residuales $R_n \rightarrow 0$. En particular, cuando T es suficientemente grande la concentración residual de cada dosis es casi nula.

¿En un modelo práctico cómo se elige un T lo suficientemente grande de tal forma que las concentraciones residuales en periodos de tiempo T sean casi nulas? Resulta que para elegir un T adecuado hay que considerar diferentes factores como por ejemplo el tiempo de asimilación del medicamento en el organismo, la forma en que se suministra el medicamento, la forma de liberación del principio activo y el alcance del objetivo de este, las propiedades físico-químicas del medicamento y el tipo de absorción para el cual fue diseñado. Estos son tan solo algunos de los factores que permiten el accionar de los medicamentos que se suministran;



por tales motivos la eliminación de los mismos cambia teniendo como resultados diferentes tiempos para que las concentraciones residuales caigan para ciertos periodos de tiempo promedios. En el modelo planteado se considera que las concentraciones residuales caigan para evitar una posible sobre-dosificación por liberación inmediata e incontrolada de la dosis.

Las dosis de medicamentos son entonces esencialmente independientes, esto quiere decir que se considera en el modelo que la dosis no depende de los posibles residuos de las administraciones anteriores y el gráfico de $C(t)$ es el de la figura 2.2.2

La longitud de los intervalos T son tan cortos que $0 < e^{kT} < 1$ y que $\frac{R}{C_0} > 1$. Cuando $R_n \rightarrow \infty$, la concentración C_n después de cada dosis se hace más grande. La pérdida durante cada periodo después de cada dosis se hace cada vez más grande para valores grandes de C_n , según $\frac{dC}{dt} = -kC$, $C(0) = C_0$

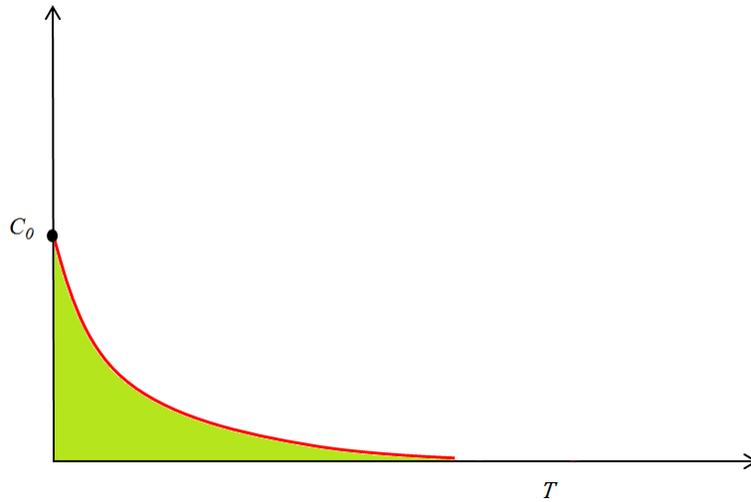


Figura 2.2.5: Concentración como área bajo la curva

El área verde de la curva puede ser una representación de la pérdida en la concentración.

Finalmente la calidad en la concentración después de cada dosis se hace imperceptiblemente próxima a la concentración C_0 resultante de cada dosis. Cuando esta condición prevalece (la pérdida de concentración iguala a la ganancia), la concentración oscilara entre R al final de cada período y $R + C_0$ al principio de cada período.

El medicamento es ineficaz por debajo de la concentración L y perjudicial por encima de cierta concentración H como se acaba de mostrar. A la vez L y H son guías seguras de modo que una persona no sufrirá sobredosis severa si la concentración de medicamento sube algo por encima de H de la misma forma no es necesario acumular concentraciones en la sangre si la concentración baja ligeramente por debajo de L . Entonces para el paciente se opta por la estrategia de maximizar el tiempo entre dos dosis haciendo $R = L$ y $C_0 = H - L$, como se indico anteriormente. La sustitución de $R = L$ y $C_0 = H - L$ en la ecuación (2.1), da lugar a

$$L = \frac{H - L}{e^{kT} - 1}$$



Resolviendo se obtiene

$$L(e^{kT} - 1) = H - L$$

$$Le^{kT} - L = H - L$$

$$Le^{kT} = H$$

$$e^{kT} = \frac{H}{L}$$

$$\ln(e^{kT}) = \ln\left(\frac{H}{L}\right)$$

$$kT = \ln\left(\frac{H}{L}\right)$$

$$T = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{H}{L}\right) \quad \square$$

Para alcanzar rápidamente un nivel de concentración eficaz, se provee de una dosis llamada *dosis de carga* que produce inmediatamente una concentración en sangre de $H \left(\frac{mg}{ml}\right)$ (por ejemplo estas dosis de carga podría ser igual a $2C_0$). Esta medicación es seguida cada $T = \left(\frac{1}{k}\right) \ln\left(\frac{H}{L}\right)$ horas, por una dosis $C_0 = H - L$

Medicamento	k	$t_{1/2}$ (tiempo de vida media)
Acetaminofén (Paracetamol)	0,277	2,50
Diazepam (Valium)	0,021	33
Digoxina	0,0161	43
Gentamicina	0,347	2
Lidocaína	0,39	1,8
Teofilina	0,126	5,5

Tabla 2.2.2: Constante de eliminación k para algunos medicamentos

2.2.6. Revisión intuitiva del modelo

El modelo puede ser adecuado ya que se asemeja a la práctica médica común en la aplicación de una dosis varias veces en periodos de tiempos más prologados que los habituales, método utilizado para medicamentos o tratamientos con efecto adversos producto de altas concentraciones residuales. La hipótesis clave del modelo es que el decrecimiento en la concentración de la dosis del medicamento en la sangre es proporcional a la concentración misma. La ecuación (2.1) permite la predicción de los niveles de concentración bajo condiciones variables para las dosis, de este modo, el medicamento puede probarse para determinar experimentalmente el nivel más bajo de efectividad L y el nivel más alto de seguridad H , con apropiados factores de seguridad para permitir imprecisiones en el proceso de modelación. Las formulas $C_0 = H - L$ y $T = \left(\frac{1}{k}\right) \ln\left(\frac{H}{L}\right)$ pueden usarse para formular una dosis eficaz y segura de un medicamento, suponiendo que la dosis de carga es varias veces más grande que C_0 . Una deficiencia en el modelo es la hipótesis de la subida instantánea en la concentración cuando se administra la dosis. Un medicamento como una aspirina tomada oralmente requiere un tiempo finito para difundirse en la sangre; la hipótesis no es pues realista para dicho medicamento, para tales casos la gráfica de la contracción de droga contra el tiempo para una dosis es algo así:



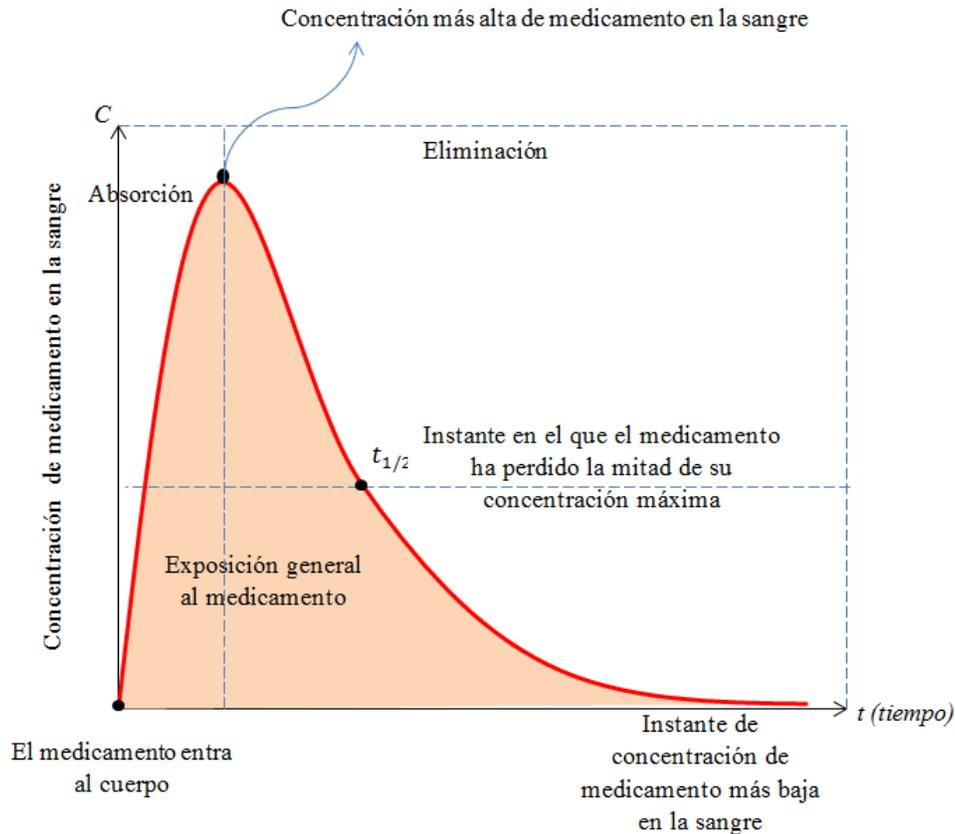


Figura 2.2.6: Decaimiento de la concentración transcurrido t

2.3. Liberación de medicamentos en la sangre

En primer lugar hay que diferenciar tres conceptos diferentes, ellos son: fármacos, medicamentos y drogas. El primero es también denominado principio activo, es una molécula sintetizada en laboratorio o aislada de la forma natural en que se encuentre, la composición química del fármaco está claramente establecida y no hay lugar para ambigüedades. El segundo es la combinación de uno o varios fármacos con otras sustancias que ayudan a localizar la fuente de acción para dicha mezcla. Finalmente el tercero resulta de una combinación de diferentes compuestos químicos sintetizados o naturales aislados, entre los cuales por lo menos uno es un principio activo por lo que la composición química no se conoce con certeza lo que genera más riesgos de efectos adversos.

La forma de suministrar cierto medicamento influye en el tiempo de liberación del componente activo y en el tiempo en el cual se mantiene presente en el cuerpo. Los medicamentos tienen una forma de liberación determinada dependiendo de la función que vayan a desarrollar en el organismo, estas pueden ser: liberación prolongada, liberación retardada, liberación con control espacial específico y liberación pulsátil. Al mismo tiempo el sitio específico del cuerpo influye en que tipo de liberación es necesaria.

Según Campmany (2006) los parámetros que deben de considerarse para suministrar un medicamento a un paciente son: "Biodisponibilidad, excreción por la orina, unión a proteínas plasmáticas, depuración, volumen



de la distribución del medicamento, vida media en el organismo, concentraciones eficaces y concentraciones tóxicas.”(p.77) Cuando el medicamento entra en contacto con el paciente la concentración incrementa o disminuye dependiendo de los parámetros anteriores, si hay un aumento no controlado hay un mayor riesgo de efectos adversos, por otro lado si hay disminución por debajo de lo necesario no habría respuesta terapéutica del organismo frente al medicamento.

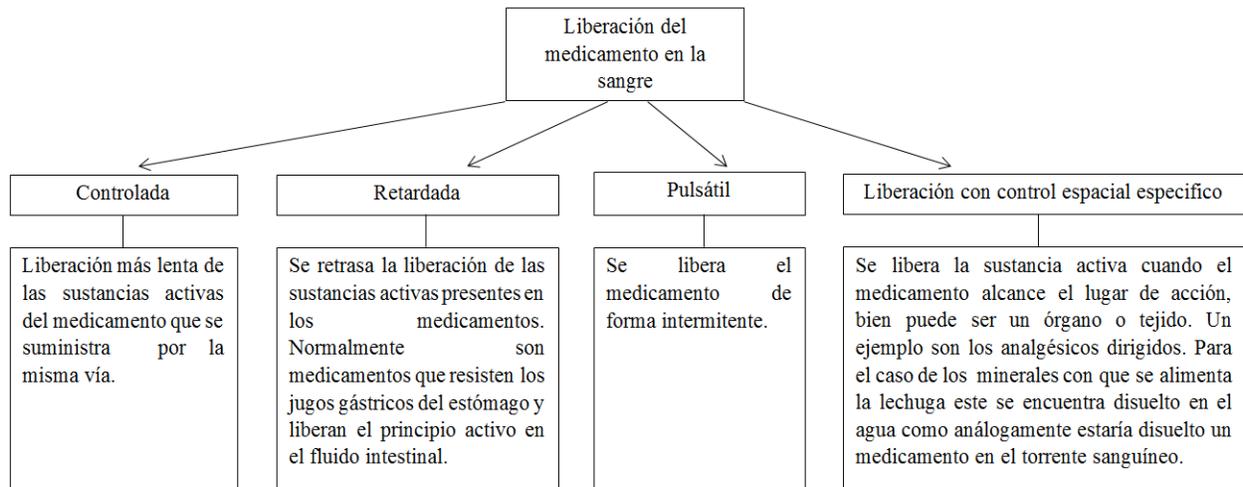


Figura 2.3.1: Formas de liberación de un fármaco o medicamento

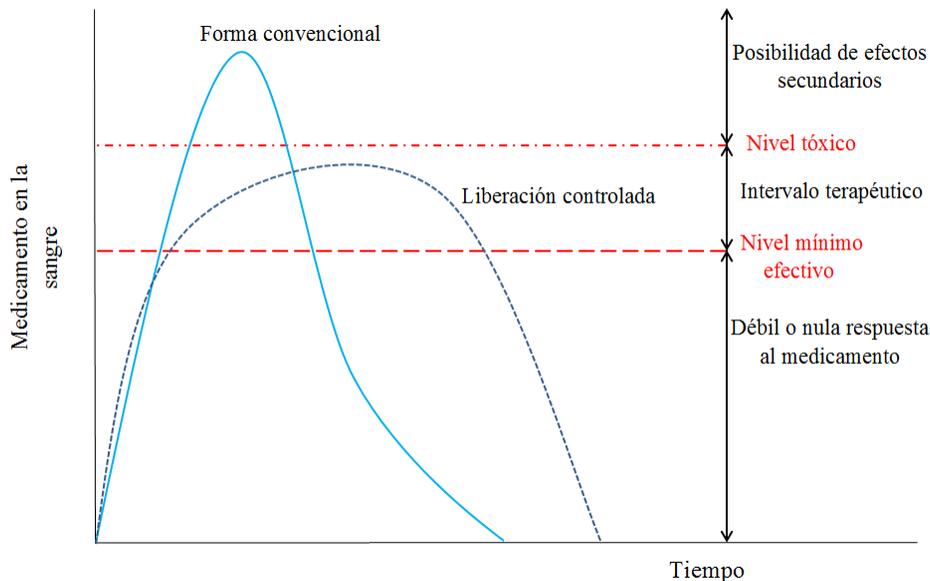


Figura 2.3.2: Comportamiento del medicamento suministrado de forma convencional

Para este trabajo se ha considerado que la liberación del medicamento es de forma directa en la sangre por vía intravenosa o intramuscular, de este modo es más acelerado el proceso de eliminación de los residuos por factores metabólicos, principalmente por el sistema excretor y sistema inmunológico. En el cultivo hidropónico es semejante este proceso ya que los componentes nutricionales son liberados directamente en



el agua reduciendo la concentración de minerales por la captura de nutrientes a medida que la planta va madurando. En contexto con el modelo de la dosis de un medicamento citado en Polanía (2011) hay que resaltar lo que propone López (2018):

En los casos de usar la vía intravasal (venosa o arterial) se entiende que el fármaco ya se ha repartido instantáneamente por todo su volumen central de distribución. Cuando la administración es por vía extravasal, los valores iniciales suelen ser cero, ya que no ha habido tiempo para dicha distribución. (p.61)

2.3.1. Relación cuerpo-medicamento

La relación entre el cuerpo y el medicamento cuando entran en contacto lo establece Armijo (1997) de la siguiente manera:

1. Absorción, es decir, la entrada del fármaco en el organismo que incluye los procesos de liberación de su forma farmacéutica, disolución y absorción propiamente dicha.
2. Distribución del fármaco para que llegue primero del lugar de absorción a la circulación sistémica y desde ella hasta los tejidos. Para que el fármaco alcance desde su lugar de absorción su lugar de acción, debe atravesar diversas membranas para llegar a la sangre y para pasar de ésta al líquido intersticial y, en su caso, al interior de las células e, incluso, de estructuras intracelulares. El paso del fármaco de la sangre a los tejidos depende de la fijación del fármaco a las proteínas del plasma, ya que sólo el fármaco libre difunde libremente a los tejidos.
3. Eliminación del fármaco, sea por metabolismo principalmente hepático o por excreción del fármaco inalterado por la orina, bilis, etc. En algunos casos, este metabolismo puede producir metabolitos activos cuya presencia también deberá tenerse en cuenta. (p.47)

2.4. Otras aplicaciones del modelo

Existen ciertos comportamientos en algunos fenómenos de la física y virología que son representados por una ecuación diferencial similar a la que se acabó de estudiar en la sección anterior. El común denominador es que el cambio de las cantidades que crecen o disminuyen es directamente proporcional a la cantidad presente en un determinado instante de tiempo.

2.4.1. Desintegración radiactiva

“La tasa a la que una cantidad de un isótopo radioactivo se desintegra es proporcional a la cantidad del isótopo presente. La constante de proporcionalidad depende sólo de la partícula radioactiva considerada”

Rutherford junto con otros científicos de la época comprobaron que algunos elementos radiactivos tienen átomos inestables y que dado un intervalo de tiempo una parte de esos átomos se desintegran dando lugar a un nuevo elemento. Con esto se evidenció que la descomposición de cierta sustancia es directamente proporcional al número de átomos que se encuentran en esa sustancia.



Si H es la cantidad de material fuente de radiación en el tiempo t , entonces la ecuación diferencial que modela el fenómeno de descomposición del material H es $\frac{dH}{dt} = -\alpha H$, con $\alpha > 0$ llamada constante de desintegración de la radiactividad.

El proceso de desintegración radiactiva es un proceso mediante el cual los átomos liberan energía bien sea por radiación electromagnética o a través de partículas producto de la fisión o fusión nuclear. El núcleo de un átomo está compuesto por dos partículas; los protones y neutrones. Los protones son los que determinan el tipo de elemento, como ejemplo, el carbono tiene 6 protones sin importar la cantidad de electrones de tenga sigue siendo Carbono. Un elemento con 7 protones ya es Nitrógeno o con 5 protones es Boro. Ahora, la cantidad de neutrones pueden variar a pesar de que todos los átomos sean del mismo elemento, a esas variaciones es lo que se conoce como isotopos del elemento. Para el caso del carbono se tiene los tres isotopos:

Carbono 12 (6 protones y 6 neutrones): Tiene 12 partículas en su núcleo

Carbono 13 (6 protones y 7 neutrones): 13 partículas en su núcleo

Carbono 14 (6 protones y 8 neutrones): 14 partículas en su núcleo.

Para los isotopos de un elemento hay que distinguir dos tipos:

Los isotopos estables. Permanecen invariantes todo el tiempo y en ellos no ocurre ningún tipo de transformación.

Los isotopos inestables. Aquellos que después de un determinado tiempo se transforman en isotopos de otros elementos más estables como por ejemplo el Carbono14 el cual después de cierto tiempo se transforma en Nitrogeno14 es decir los neutrones empiezan a convertirse en protones. Para este caso particular 1 neutrón se convierte de un protón. A este último proceso es lo que se conoce como desintegración radiactiva.

Considérese los átomos radiactivos como una población que se va reduciendo conforme avanza el tiempo. Es decir, no aparecen átomos nuevos llevándolos a la extinción.

El modelo exponencial para poblaciones

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

$k = (N - M)$ donde N es la tasa de natalidad y M es la tasa de mortandad. Para este caso $k = -M$

$$\frac{dP}{dt} = (N - M)P = -MP$$

y renombrado las variables el modelo resultante es $\frac{dH}{dt} = -\alpha H$ con solución particular para $H_0 = H(t = 0)$, $H(t) = H_0 e^{-\alpha t}$. La vida media T de un elemento es el tiempo que debe transcurrir para que se desintegren la mitad de los átomos de una muestra H de un determinado material.



$$\begin{aligned}
 H(T) &= H_0 e^{-\alpha T} = \frac{1}{2} H_0 \\
 e^{-\alpha T} &= \frac{1}{2} \\
 -\alpha T &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\
 -\alpha T &= \ln(1) - \ln(2) \\
 \alpha &= \left(\frac{\ln(2)}{T}\right)
 \end{aligned}$$

Reemplazando en la solución del modelo $H(t) = H_0 e^{-\left(\frac{t \ln(2)}{T}\right)}$. Esta es la ecuación solución del modelo conociendo la condición inicial y la vida media del elemento, es muy útil por ejemplo para utilizarse en las pruebas de Carbono14 y estimar la edad de un objeto.

2.4.2. Enfriamiento de Newton

Este modelo permite encontrar una función que predice la temperatura de un cuerpo en función del tiempo. Es decir, se introduce con él la noción de calentamiento o enfriamiento de una sustancia.

Partamos de que la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio son importantes en el sentido de que el cuerpo transmite energía en forma de calor al medio donde se encuentre. Para este caso se considera que un cuerpo se enfría cuando la temperatura es instantáneamente la misma en todos los puntos del cuerpo y se encuentra en equilibrio con el medio.

Se considera en el modelo lo siguiente:

- La temperatura T del cuerpo p en un estado inicial $t = 0$ es: $T_p(0) = \omega$
- La temperatura del medio en el instante t donde se encuentra el cuerpo p es: $T_m(t)$, además por la condición inicial $T_m(t = 0) = \mu$
- Partiendo del hecho de que $\mu < \omega$

El efecto de la temperatura del cuerpo sobre la temperatura del medio es despreciable. Por ejemplo si el medio es el propio ambiente la temperatura del cuerpo no afectada nada al medio; de esta manera la temperatura del cuerpo iguala a la temperatura del medio, es decir la temperatura final del cuerpo es igual a μ . Se puede interpretar que la tasa de decrecimiento de $T_p(t)$ disminuirá cuando $T_p(t)$ se acerque μ .



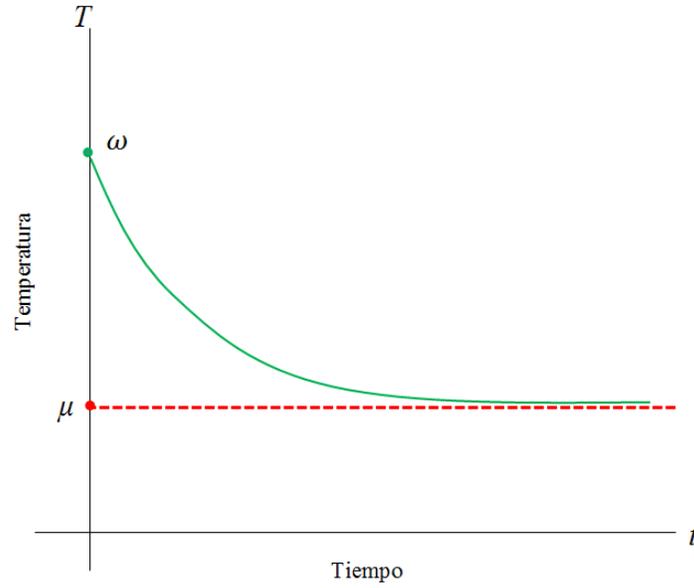


Figura 2.4.1: Decrecimiento de $T_p(t)$

En resumen

Cuando un cuerpo está a una temperatura T_p y se encuentra en un medio exterior con temperatura T_m siendo esta constante entonces el enfriamiento o la transferencia de energía va del cuerpo al medio y sigue el comportamiento de $\frac{dT_p}{dt} = -k(T_p - \mu)$ con la constante de proporcionalidad $k > 0$ y $T_p(0) = \omega$

ese valor de k se calcula mediante la expresión

$$k = \frac{\alpha s}{m C_e}$$

α : coeficiente de intercambio de calor.

s : área superficial del cuerpo p que se encuentra expuesto al ambiente.

m : masa del cuerpo.

C_e : calor específico del cuerpo.

La construcción del modelo es la siguiente

$$T_p(t + \Delta t) - T_p(t) = -k [T_p(t) - T_m(t)] \Delta t, \quad (k > 0)$$

se despeja el factor de proporción

$$\frac{T_p(t + \Delta t) - T_p(t)}{\Delta t} = -k [T_p(t) - T_m(t)]$$

Partiendo de que la temperatura varía continuamente

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T_p(t + \Delta t) - T_p(t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -k [T_p(t) - T_m(t)] \\ \frac{d}{dt} T_p(t) &= -k [T_p(t) - T_m(t)] \end{aligned}$$



Simplificando se llega a la forma estándar del modelo con temperatura constante del medio.

$$\frac{dT_p}{dt} = -k(T_p(t) - \mu), \quad T_p(0) = \omega, \quad k > 0$$

Donde se observa que la tasa instantánea del cambio de temperatura del cuerpo T_p es directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio que lo rodea.

La solución al problema de valor inicial es

$$\begin{aligned} \frac{dT_p}{dt} &= -k(T_p(t) - \mu) \\ \int \frac{dT_p}{T_p - \mu} &= \int -k dt \\ \ln |T_p - \mu| &= -k \int dt \\ \ln |T_p - \mu| &= -kt + c \\ e^{\ln |T_p - \mu|} &= e^{-kt+c} \\ T_p(t) &= e^{-kt}c + \mu \end{aligned}$$

En cuanto al problema de valor inicial

$$\begin{aligned} T_0 &= T_p(t=0) = e^{-k(0)} + \mu \\ T_p(0) &= c + \mu \\ T_p(0) - \mu &= c \\ (\omega - \mu) &= c \end{aligned}$$

reemplazando en la ecuación solución del modelo se obtiene la solución particular $T_p(t) = (\omega - \mu)e^{-kt} + \mu$ lo cual muestra como en el modelo de la dosis del medicamento que la temperatura del cuerpo decrece exponencialmente de acuerdo al medio donde se encuentre.

2.4.3. Absorción de Lambert

La tasa de absorción de luz con respecto a una profundidad s de un material translúcido es directamente proporcional a la intensidad de luz con k coeficiente molar de extinción. Si I es la intensidad de luz este fenómeno se modela por $\frac{dI}{ds} = -kI$. La solución particular al modelo es $I(s) = I_0e^{-ks}$

También conocida como ley de BOUGUER-LAMBERT-BEER o como ley de Beer-Lambert-Bouguer fue descubierta en primer lugar por el matemático y astrónomo francés Pierre Bouguer en 1729. Luego por el filósofo y matemático alemán, Johann Heinrich Lambert en 1760 y por último el físico y matemático también alemán, August Beer en el año 1852. En efecto, es un método matemático, el cual es utilizado para expresar de qué modo la materia absorbe la luz. En óptica (rama de la física que se encarga del estudio de la luz) La ley de Beer afirma que la totalidad de luz que emana de una muestra puede Disminuir debido a tres fenómenos de la física, que serían los siguientes:

- La cantidad de material de absorción en la trayectoria del rayo de luz, a este se denomina concentración molar.



- Distancia por la cual atraviesa la luz la muestra del material. A esto se denomina distancia del trayecto óptico.

- Probabilidad de que el fotón (partícula elemental portadora de todas las formas de luz visible) de esa amplitud particular de onda generada por la luz pueda absorberse por el material.

Frecuentemente la intensidad de un haz de luz incidente declina significativamente a medida que pasa a través del medio absorbente.

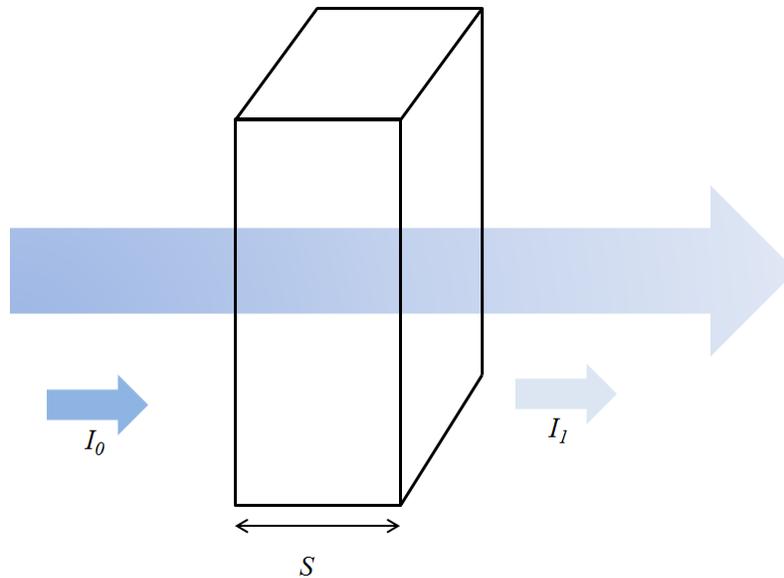


Figura 2.4.2: Rayo de luz que atraviesa el material translúcido.

Con respecto a las aplicaciones del modelo este se usa ampliamente para analizar proteínas, ya que varios aminoácidos presentan absorciones importantes en la región ultravioleta del espectro electromagnético. Por tanto, las reacciones químicas o fenómenos moleculares que impliquen un cambio en la coloración, pueden analizarse mediante los valores de absorbancias, a una o más longitudes de onda además haciendo uso de análisis multivariante, puede analizarse mezclas complejas de cromóforos. De esta manera se puede determinar la concentración de todos los analitos, y además, clasificar las mezclas y diferenciarlas unas de otras; por ejemplo, descartar si dos minerales idénticos proceden de un mismo continente o país en específico.

2.4.4. Otro modelo para la propagación de una medicina

Un modelo matemático para la razón con la que se propaga una medicina en el torrente sanguíneo está dado por

$$\frac{dx}{dt} = r - kx$$

donde r y k son constantes positivas con la función $x(t)$ que describe la concentración de la medicina en el torrente sanguíneo en el instante t . Zill (2009)

El valor de $x(t)$ conforme $t \rightarrow \infty$ se encuentra haciendo $r - kx = 0$ donde para x se tiene la solución de equilibrio $x = \frac{r}{k}$, cuando $x < \frac{r}{k}$ se tiene que $\frac{dx}{dt} > 0$, cuando $x > \frac{r}{k}$ se tiene que $\frac{dx}{dt} < 0$. Haciendo el retrato fase se puede observar que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{r}{k}$.

Con la condición inicial $x(0) = 0$ se obtienen la solución particular

$$x = \frac{r}{k} - \left(\frac{r}{k}\right) e^{-kt}$$

donde se $x \rightarrow \frac{r}{k}$ cuando $t \rightarrow \infty$. Si $x(T) = \frac{r}{2k}$ con $T = \frac{(\ln 2)}{k}$.

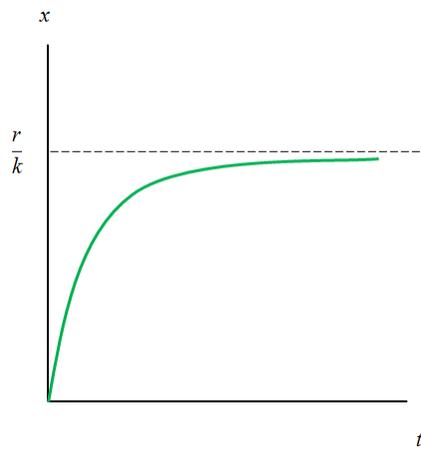


Figura 2.4.3: Comportamiento de r/k



Capítulo 3

Características de los cultivos hidropónicos de lechuga y sus nutrientes

3.1. ¿Qué es un cultivo hidróponico?

Es una modalidad de cultivo sin la necesidad del suelo que utiliza soluciones nutritivas en agua para aportar los elementos necesarios para el crecimiento de la planta, técnica que permite la producción de alimentos para el consumo humano principalmente hortalizas. Esta forma de cultivo se desarrolla en estructuras simples o complejas aprovechando espacios y áreas no agrícolas, las plantas pueden ir sostenidas en un medio llamado sustrato que permite el crecimiento. Los sistemas con aportes de soluciones nutritivas pueden ser de manera estática o circulante. En la técnica de cultivo hidropónico hay tener presentes los factores claves en el crecimiento y desarrollo del mismo, como la luz, temperatura, agua, nutrientes y espacios.

Las hortalizas como la lechuga, independientemente de su variedad, son cultivadas generalmente en huertos hidropónicos. Ella es un cultivo de ciclo corto que se puede desarrollar en lugares donde la temperatura promedio es elevada y donde no hay mucha variación estacional (lluvia-sequia). [Beltrano \(2015\)](#) afirma: “El rendimiento de los cultivos hidropónicos pueden duplicar o más los de los cultivos en suelo” (p.8). A modo de ejemplo se presenta en la figura siguiente; lo que es estructuralmente un sistema hidrónico recirculante donde la exposición al sol es necesaria para que puede ocurrir la fotosíntesis, proceso de transformación de la energía en alimento.

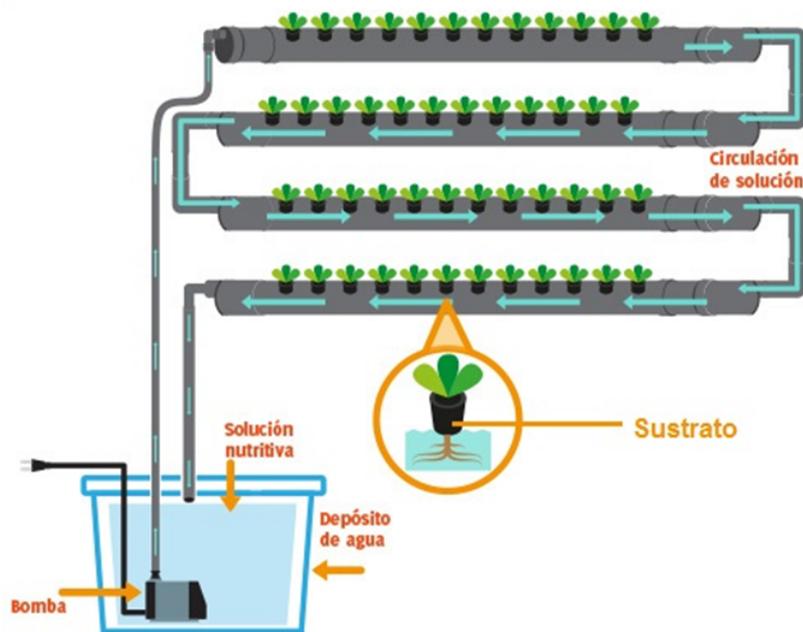


Figura 3.1.1: Sistema hidropónico NFT

3.2. Absorción de nutrientes en la planta de lechuga

En general, las necesidades básicas de las plantas corresponden a temperatura, humedad, agua, nutrientes y espacios. De acuerdo con el experimento realizado por Jan Baptista Van Helmont (1557 - 1644) se mostró que las plantas obtienen sustancias del agua para su desarrollo, además refuto que la alimentación de las plantas solo era producto de los elementos distribuidos en el suelo. Este fue un experimento donde se aisló otras variables que afectaban el crecimiento. John Woodward (1665-1728) experimentó cultivando plantas en agua destilada y en agua con tierra disuelta obteniendo como resultado que el crecimiento era mejor mientras más tierra tuviera el agua (enriquecimiento) lo que lo llevo a concluir que el crecimiento de las plantas era el resultado de ciertas sustancias y minerales que estaban presentes en la tierra. Este fue un punto de partida para la sustitución del suelo.

Un avance muy importante en esta materia fue logrado por Jean Baptiste Boussingault(1851) quien experimentando con el crecimiento de plantas en medios inertes logró “alimentar” plantas con soluciones de elementos puros y agua, observando que las plantas contenían nitrógeno, además, identificó los elementos necesarios y sus proporciones para que las plantas pudieran crecer en este medio de forma similar que en el suelo, ya para el siglo XIX, los resultados de las investigaciones de científicos como Leibig y Sprengel tuvieron como resultado el conocimiento de la lista de los 15 elementos químicos necesarios para el desarrollo de las plantas, al mismo tiempo comprobaron que si en el suelo o en el medio donde se desarrollara el vegetal faltaba algún elemento, estos podrían no crecer normalmente , enfermarse o morir.

En el año 1860 el profesor Julius Von Sachs, mostró al mundo la primera fórmula para una solución de nutrientes solubles en agua donde los vegetales podían crecer, aquí fue el inicio de lo que se denominó como nutricultura.



Macronutrientes o elementos mayores	Micronutrientes o elementos menores
Sales de nitrógeno	Hierro
Fósforo	Manganeso
Azufre	Molibdeno
Potasio	Boro
Calcio	Zinc
Magnesio	Cobre
Carbono	Nickel
Hidrógeno	
Oxígeno	

Tabla 3.2.1: Minerales necesarios para la formación de la planta.

El ciclo antes del consumo de la lechuga cultivada en tierra, es de aproximadamente tres meses y medio, pero en la modalidad de hidroponía, es de alrededor de un mes y medio, también cabe destacar que el ahorro del agua es mayor en comparación con el cultivo convencional, pues 80 por ciento del agua que se utiliza para el riego “se filtra a las capas inferiores del terreno y otro porcentaje se evapora”, en contraste, con la modalidad hidropónica estos problemas se minimizan casi en su totalidad. Según [Beltrano \(2015\)](#):

La absorción de nutrientes es un factor importante en el cultivo de plantas de cualquier tipo. Las raíces deben absorber lo que la planta necesita para crecer sana y de un tamaño conveniente. Cuando se cultiva en suelo las raíces crecen continuamente para buscar los nutrientes en el agua, aire y suelo. En esto invierte una cantidad considerable de la energía. En el cultivo hidropónico, las raíces están continuamente en contacto con las cantidades apropiadas de nutrientes, ya que se plantan en un medio de crecimiento adecuado. El exceso de energía la planta la utiliza para desarrollar las partes superiores, incluyendo las flores y los frutos. (p.24)

es decir, esta modalidad tiene muchas ventajas con respecto a la agricultura tradicional.

3.2.1. El agua como componente fundamental

El agua es el componente fundamental de las plantas y en la fotosíntesis es una pieza clave. Para recordar este concepto se hace un ligero repaso. Para empezar, es importante realizar una pregunta: ¿Cómo se alimentan las plantas? La fotosíntesis es un proceso que realizan las plantas para fabricar su propio alimento y de esta manera poder desarrollarse. Para llevarse a cabo, es necesario de varios elementos como la luz del sol y el dióxido de carbono CO_2 obtenido del aire y del agua. Un elemento que resalta entre todos y caracteriza este proceso es la clorofila, sustancia verde que tiene todas las plantas, fundamental para realizar el proceso.

¿Cómo se realiza la fotosíntesis? La raíz tiene contacto directo con el suelo lo que permite que las plantas absorban el agua y las sales minerales presentes en la tierra. El agua y los minerales suben por el tallo y se distribuyen por toda la planta hasta llegar a las hojas. En resumen se clasifica este proceso en las siguientes etapas:

1. Etapa difusional: El CO_2 es capturado del ambiente por las hojas y es distribuido hasta el cloroplasto de las células.



2. Etapa fotoquímica: Captación de la luz que realiza los pigmentos fotorreceptores de las hojas para luego ser transformada en energía química
3. Etapa bioquímica: Se hace uso de los productos fotoquímicos para generar compuestos secundarios.

Los estomas absorben el dióxido de carbono del aire circundante a la planta. La mezcla de agua, sales minerales y dióxido de carbono es denominado sabia bruta, que junto con la clorofila hacen parte de lo se puede denominar “la sangre vegetal”. Al recibir la luz del sol comienza el proceso de transformación de la sabia bruta en sabia elaborada, siendo este el alimento final de las plantas.

El agua representa entre 60 y 80% del peso de la planta en su estado natural, además, la mayor parte del tejido de las plantas es fibroso lo que permite almacenar el preciado líquido. El agua cumple la función de vehículo, lo que contribuye al crecimiento normal de las células; ayuda al enfriamiento de las hojas como principal receptor de energía y es allí donde llegan los nutrientes por medio del xilema, como también fotoasimilados por el floema. En general, el agua es un medio por donde se desarrollan todas las reacciones químicas en el interior de la planta. De manera similar ocurre en el plasma sanguíneo humano, medio por donde los medicamentos alcanzan determinados lugares de acción. Toda dosis de medicamento llega a una velocidad particular, dependiendo de la forma de administración y el lugar de acción.

Se destaca que la circulación de agua en toda la planta de lechuga depende de factores importantes como la disposición del agua en el medio, la morfología y fisiología de la variedad, pero existen otras condiciones externas que permiten esta circulación entre ellas las condiciones ambientales, la temperatura, el viento y la humedad relativa de la zona. [Beltrano \(2015\)](#) asegura:

El estado hídrico de una planta entonces va a variar permanentemente a lo largo del día y de los días, en función de la cantidad de agua que absorbe por la raíz y la que pierde por transpiración a través de sus hojas. Es posible que en un suelo con buen contenido de agua o en un sistema hidropónico, el balance hídrico de la planta sea negativo porque la pérdida de agua por transpiración excede la absorción desde las raíces. Este balance podrá revertirse cuando disminuya la transpiración y el agua absorbida sea mayor.(p.34)

Las cantidades de agua que la planta puede absorber están sujetas a las características físico-químicas de la solución nutritiva, la distribución de la raíz dentro del sistema hidropónico, la morfología de la raíz y el ajuste osmótico como mecanismo de absorción. El movimiento del agua va desde la raíz de la lechuga pasando por el tallo y llegando hasta las hojas sin gasto de energía metabólica. El desarrollo de pelos absorbentes de las raíces promueve mayor presencia de acuaporinas encargadas absorber el agua y llevarla hacia el interior de las células.



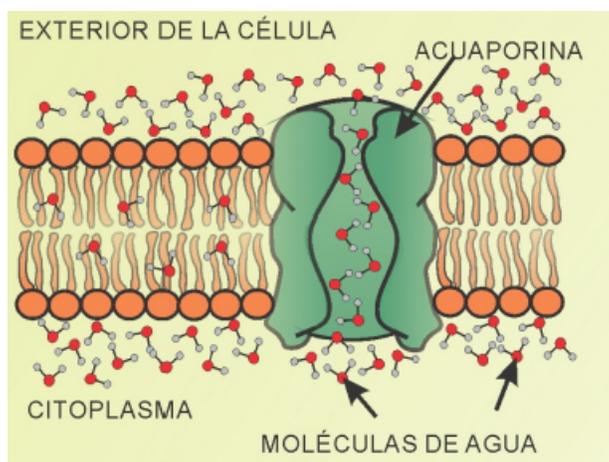


Figura 3.2.1: Acuaporina Beltrano (2015) (p.40)

3.3. La solución nutritiva para el cultivo.

Esta es una de las partes más importantes que influye en el crecimiento del cultivo. Se destaca la importancia de cada elemento presente en la solución. El nitrógeno por ejemplo, es uno de los elementos que más se encuentran presentes en las plantas, este forma parte de las proteínas ayudando a los procesos metabólicos. Está presente en el ARN y ADN, por lo que la ausencia de los compuestos nitrogenados hace que la planta no crezca. Es capturado en forma de ion y como nitrógeno atmosférico directamente, por otro lado, las plantas no tienen muchas reservas de estos compuestos con lo que se hace evidente el daño y se nota lo que se denomina la clorosis, siendo este el amarillamiento de las hojas, las raíces también se alteran pasando a ser más largas, frágiles y delgadas.

El fósforo es un elemento imprescindible para las fuentes de energía que provienen de la fotosíntesis y la respiración, este elemento se encuentra presente en tejidos jóvenes de la planta donde participa activamente en el crecimiento, al mismo tiempo desempeña un papel fundamental en la absorción de los nutrientes, por tanto la carencia de él puede producir enanismo en la lechuga. Por otro lado, el potasio es un elemento que no forma parte de la estructura química en la célula vegetal, pero una de sus principales funciones es retener algunas reservas de agua y actúa como un activador de los procesos metabólicos. Es un elemento que se encuentra en constante movimiento dentro de la planta, el *K* participa activamente en la apertura y cierre de los estomas.

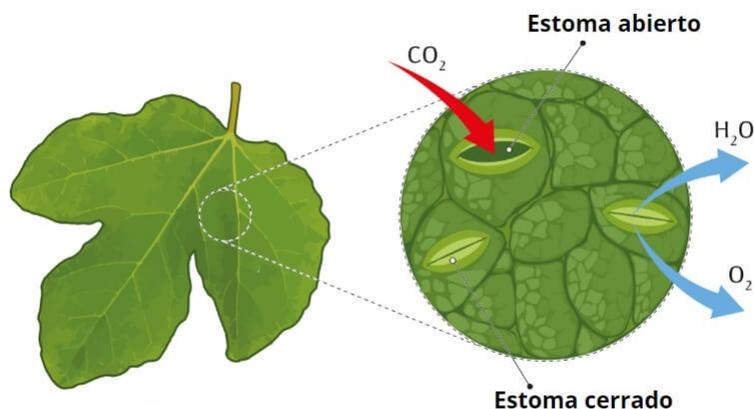


Figura 3.3.1: Accionar de los estomas (Recuperado de: lifeder.com)

La ausencia de este elemento se nota cuando las hojas que se encuentran en la base de la planta empiezan a mostrar un color amarillo en los bordes. El magnesio es el elemento estructural de la molécula de la clorofila y promueve la absorción y translación del fósforo. El Azufre hace parte de los aminoácidos esenciales como también de los compuestos como la biotina, este elemento funciona como coencimas para diferentes procesos, cuando hay ausencia de él, las hojas jóvenes tienden a morir. El Calcio es fundamental para el normal funcionamiento de la pared celular de los tejidos vegetales, también, actúa frente a señales ambientales y hormonales para sintetizar enzimas que ayuden a sintetizar las amenazas, proporciona elasticidad y elongación a las células más jóvenes.

Los elementos que se necesitan en menor proporción pero que igualmente son importantes son:

- El hierro elemento estructural de todo el sistema de la planta y es indispensable en el proceso de la fotosíntesis, una característica visible es que entre más tenga color verde oscuro la planta quiere decir que hay una mayor presencia de este elemento.
- El Manganeso es uno de principales transportadores de electrones entre el agua y el fotosistema, ayuda a incrementar la movilidad del magnesio dentro del sistema.
- El cobre tiene una importancia relevante en la etapa lumínica de la fotosíntesis ayudando a la formación de la plastocianina; la absorción de este elemento ocurre en forma iónica. Una característica notable cuando hay ausencia de cobre es que las hojas empiezan a doblarse hacia el revés ya que es un elemento que no tiene mucha movilidad en el organismo de la planta.
- El Zinc, en cambio es absorbido en forma de cation por la planta y es necesario para la biosíntesis de la clorofila.
- El Boro es fundamental para la función correcta de las membranas celulares y para la síntesis del ARN y ADN.
- El Molibdeno participa en las reacciones de transferencia de electrones y aporta fundamentalmente al desarrollo de las flores en las plantas.
- El cloro es un elemento que está relacionado con la liberación de O_2 en el proceso de la fotosíntesis y su ausencia reduce el crecimiento de las raíces.



- El Níquel ayuda en la producción de una enzima conocida como ureasa que ayuda a la absorción de minerales.

3.4. La concentración ideal de la solución

Los niveles de oxígeno necesarios en el agua son suministrado por el movimiento que hace la bomba de agua que se instala en el sistema hidropónico recirculante. La conformación de la solución debe tener una relación balanceada de minerales; conductividad eléctrica y pH dependiendo del requerimiento específico de cada planta. En el caso de las plantas de lechuga el pH de la solución debe de estar entre [5.3, 5.5], es decir un rango un tanto ácido con presencia de compuestos nitrogenados. El agua no debe ser destilada ni totalmente desmineralizada para agregar los minerales, normalmente para hidropónica debe tener cantidades considerables de los compuestos CO_3HCa , CO_3HMg , SO_4^{-2} y NO_3^- , la alcalinidad del agua debe estar equilibrada, es decir, un balance adecuado de CO_3 / HCO_3

Factores importantes a tener en cuenta:

1. Oxigenación de la solución

El O_2 es fundamental en la solución ya que contribuye a la absorción de los iones (partícula cargada eléctricamente no neutra). Si no hay circulación de oxígeno tanto en el ambiente circundante de la plantación, como en las raíces, las plantas tienden a acumular CO_2 en medio de los pelos absorbentes localizados en las raíces. En el NFT las raíces se encuentran en contacto directo con agua rica en oxígeno garantiza un pleno desarrollo del cultivo.

2. Temperatura

El órgano de la planta que permanece todo el tiempo en contacto con el agua es la raíz. La temperatura ideal para que los sistemas radiculares se desarrollen se encuentra entre los $20^\circ C$ a $25^\circ C$ de lo contrario interfiere en el metabolismo de la planta y en el intercambio de energía con el exterior. Se sabe que el O_2 se disuelve mejor en el agua entre estas temperaturas. A temperaturas mayores de $25^\circ C$ se ocasiona disminución la disponibilidad del hierro, las bajas temperaturas ocasionan que los iones de NH_4^+ y NO_3^- no sean absorbidos al mismo tiempo.

3. Niveles de acidez

Cuando el $pH \geq 7,5$ no se absorbe el anión NO_3^- . Si $pH \leq 4$ no se absorbe el potasio lo cual produce un desbalance en la polaridad de las membranas celulares que se encuentran en las raíces. Es de importancia vital el rango del pH de la solución.

4. Interacción iónica

Esta interacción ocurre cuando son absorbidos los nutrientes y son trasladados a lugares en específico o cuando cumplen funciones metabólicas. El exceso de potasio inhibe la capacidad del sistema para absorber magnesio o calcio, en efecto, si algún elemento está más presente que otro, los iones no ingresan a la planta provocando un desbalance de conductividad eléctrica nutricional.

5. Salinidad

Las soluciones nutritivas con grandes contenidos de sales tienen una gran influencia en la velocidad y forma en la cual son absorbidos los elementos presente en el medio acuoso. Los iones de sodio y cloruro están presentes en todas las soluciones que pretenden simular la tierra. Si es muy grande la



concentración salina se genera una presión osmótica mayor en la solución, bloqueando la absorción de las moléculas de agua que necesita la planta.

6. Edad

Cuando la raíz aún es muy joven, la tasa de absorción es mayor en comparación con la planta ya desarrollada. A medida que se desarrolla, la mayor parte de nutrientes son capturados por la región de la raíz que se conoce como zona pelífera.

7. Concentración externa de nutrientes

Además de capturar nutrientes y minerales, todo el sistema hidropónico puede acaparar CO_2 o CO cuando el ambiente donde se encuentra no dispone de buena ventilación. La raíz no hace todo el trabajo de absorción, el medio circundante influye en la disponibilidad de la planta para tomar esos nutrientes.

Beltrano (2015) afirma:

La lechuga, como ejemplo, es una especie que si bien, no tiene elevadas necesidades nutritivas, es sensible a la salinidad elevada, a los desequilibrios nutricionales, y por su sistema radicular poco desarrollado, la afectan tanto la falta como el exceso de agua. Es sensible a la carencia de Boro y Molibdeno. Es sensible al Cloro en el agua de riego y es sensible a pH bajos (p.93).

La conductividad eléctrica es la capacidad que tiene la solución de conducir electricidad, se mide en S/cm^2 e indica la cantidad de sales disueltas en el agua para el cultivo. Se tiene que encontrar en el intervalo [1.8 , 2.3] para que exista una disponibilidad de los nutrientes. Para la lechuga en específico se puede manejar las concentraciones siguientes:

Lechuga	Macronutrientes (mEq/L)	Micronutrientes mg/L
NO_3^-	9,5	
NH_4^+	0,5	
$PO_4H_2^-$	1,0	
K^+	5,75	
Ca^{++}	2,25	
Mg^{++}	1,0	
SO_4^-	1,0	
Fe^{++}		0,56
Mn^{++}		0,56
Cu^{++}		0,03
Zn^{++}		0,26
B		0,22

Tabla 3.4.1: Especificaciones para la lechuga

Como ayuda tecnológica, los sensores de iones determinan en minutos la concentración del ión de determinados elementos en la solución nutritiva. La construcción de un objeto matemático para encontrar una dosis adecuada de minerales en un cultivo hidropónico es una propuesta de investigación abierta para futuros estudios.



3.4.1. Construcción de soluciones nutritivas

En la sección inmediatamente anterior se recopila información sobre los criterios a tener en cuenta para formular soluciones nutritivas con determinadas concentraciones de minerales. A modo de ejemplo útil, se expone cómo está constituida la concentración que propone el autor [Beltrano \(2015\)](#) resumido en la tabla 3.3.2 con las respectivas cantidades.

Como aplicación matemática se establece el cálculo de las cantidades de minerales requeridos para construir soluciones nutritivas según [Soto \(2004\)](#) (p.109), como se citó en [Valverde \(2013\)](#) (p.24)

$$h = g \cdot \frac{M}{A} \cdot \frac{100}{h_s}$$

Donde h es la cantidad que se requiere de fertilizante; g es la cantidad que se requiere del nutriente (mg/L); M es el peso molecular de la sal; A es el peso atómico del elemento y finalmente h_s es el porcentaje de pureza de la sal fertilizante. Resulta de gran aplicación conocer las cantidades de minerales necesarios para un cultivo hidropónico, como se dedujo anteriormente, ya se conoce la concentración inicial para un medicamento $C_0 = H - L$ y se conoce el tiempo de aplicación del este $T = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{H}{L} \right)$, ahora es conveniente realizar una comparación entre las variables del crecimiento de la planta en hidroponía y los medicamentos en el cuerpo humano para decidir si es aplicable o no el modelo a los cultivos hidropónicos.

3.5. Similitudes entre las características básicas de los nutrientes en el cultivo hidropónico y las principales cualidades de los medicamentos en la sangre

- La configuración iónica de los elementos que mayor influencia tienen en el crecimiento de la planta de lechuga en cultivo hidropónico son: K^+ , Ca^{2+} y Mg^{2+} los cuales tienen relación mutua con otros elementos presentes en la solución. En los medicamentos el enlace más frecuente que existe entre el fármaco y los receptores celulares es el iónico por consiguiente, el hígado realiza la transformación del principio activo del fármaco para que pueda ser absorbido.
- Cualquiera de los elementos que componen una solución nutritiva son tóxicos para las plantas si se suministran en proporciones desbalanceadas, de manera similar cuando se suministra a un paciente algún medicamento sin tener en cuenta la proporcionalidad entre el peso, la edad, las alergias y la tolerancia a los componentes activos, el resultado es nocivo o totalmente ineficaz.
- La concentración de nutrientes en el sistema hidropónico está relacionado directamente con la forma en que se encuentran presentes en el medio. Por otra parte, toda dosis que se suministra a través de una vía intravascular, se distribuye rápidamente en la circulación general, de esta manera está disponible la totalidad de la dosis suministrada.
- La concentración de los nutrientes tiende a decrecer con la edad y la madurez que alcanza la planta. En cuanto a la distribución del medicamento por todo el cuerpo fruto del sistema circulatorio, el proceso de metabolización desempeña un papel fundamental para asimilar los principios activos, posteriormente son excretados los desechos de dicho proceso. [Armijo \(1997\)](#) menciona:



La intensidad de los procesos de absorción, distribución y eliminación varía con el tiempo; por este motivo, la cantidad de fármaco que hay en el organismo no permanece estática sino que varía con el tiempo. El curso temporal de la cantidad de fármaco que hay en el organismo depende de la influencia conjunta de los procesos de absorción, distribución y eliminación (p.47).

- La planta absorbe los elementos dispuestos en la solución nutritiva en dos fases: primero la germinación de la semilla y brote de la primera hoja, segundo la formación de la roseta y el desarrollo maduro de la planta. [Armijo \(1997\)](#) plantea que:

Para que un fármaco produzca sus efectos terapéuticos o tóxicos, debe alcanzar un intervalo preciso de concentraciones en la biofase, es decir, el medio en que interactúa con sus receptores. Debajo de este intervalo, no se observará ningún efecto farmacológico o éste será subterapéutico; por encima, el efecto puede ser excesivo o pueden aparecer otros efectos no deseados (p.47).

- La medición numérica de los niveles de absorción de los minerales en el cultivo hidropónico es realizada por medio de análisis químico del material vegetal. Para los medicamento presentes en el cuerpo, la medición de concentración farmacológica se realiza a través de un análisis de concentraciones plasmáticas.

- [Valverde \(2013\)](#) propone que: “La curva de absorción determina gráficamente la extracción de un determinado nutriente por parte de la planta en su ciclo de vida”(p.22)., de manera similar la curva de eliminación de concentración en la sangre de un medicamento muestra la extinción de la concentraciones para ciertos periodos de tiempo. [Valverde \(2013\)](#) plantea que:

(...) Las gráficas de absorción se basa en ecuaciones de regresión que modelan la cantidad de minerales absorbida (...) en función de la edad del cultivo y permite identificar los puntos de máxima absorción y la cantidad total de cada nutriente que requiere el cultivo.

Según [Molina \(2006\)](#) como se citó en [Valverde \(2013\)](#): “La curva optima de consumo de nutrientes define la aplicación de un determinado elemento evitando así las posibilidades de deficiencia o de consumo de lujo (...) y permite la aplicación de las sales en determinadas etapas del cultivo” (p.22).

- La fertilización de cultivos hidropónico se basan en dosificaciones lo que permite estimar la cantidad absorbida del mineral por la planta. La dosis de un medicamento se suministra en intervalos de tiempo apropiados según la configuración del componente activo y la fisiología del paciente, para el caso particular de una inyección intravenosa se toman muestras de sangre para los intervalos de tiempo previamente establecidos, estos datos arrojan “la curva de concentración decreciente”.



Capítulo 4

Preliminares del modelo para la concentración de minerales en un cultivo hidropónico de lechuga

En el siguiente capítulo se resalta las analogías entre las características del modelo para la dosis de un medicamento en humanos y los comportamientos de los nutrientes en el cultivo hidropónico, caso particular la lechuga. Resulta que, por lo expuesto en capítulos anteriores, el modelo para los fármacos también puede describir una curva de absorción de nutrientes en plantas, conocido de igual manera en la teoría de cultivos hidropónicos como curvas de absorción.

El cultivo hidropónico de lechuga es un sistema biológico, lo cual traduce en un elevado nivel de complejidad; para abordar esto se considera que los sistemas complejos se pueden dividir de manera natural en varios componentes del sistema, también llamados subsistemas. El enfoque de esta división se debe considerar como una estructura jerarquizada, la cual puede ser: moléculas del elemento – estructura celular de la planta – célula – tejido – órganos – planta como individuo – cultivo como población – ecosistema circundante.

Al reducir los límites en los que se encuentra el sistema biológico cultivo hidropónico, se consigue una simplificación que debe orientarse hacia el aspecto de mayor interés, que en este caso es la asimilación u absorción de nutrientes. Esto va de acuerdo con que un modelo es la representación simplificada de un sistema o subsistema en caso particular.

En los capítulos anteriores se menciona que la velocidad de absorción general de medicamentos depende de la dosificación de este. Por otra parte, todo organismo vivo tiende a adaptarse a la frecuente presencia de un medicamento, de manera similar ocurre con los minerales en el cultivo hidropónico. Los procesos de absorción, distribución y eliminación de nutrientes en un cultivo hidropónico pueden ser simulados o representados a partir de diferentes tipos de modelos matemáticos, los cuales describen la evolución en el tiempo de los niveles de concentraciones en el organismo vegetal.

De acuerdo con la idea de López (2005), los parámetros que se necesitan para explicar un determinado modelo dependen directamente de la complejidad de los procesos que se involucran, en el cultivo hidropónico, los parámetros (si existen) también dependen de la forma de disposición de los minerales en la solución nutritiva. Los parámetros son determinados a partir de los datos recolectados de procesos experimentales, los datos son: concentración; como variable dependiente, y el tiempo como variable independiente.

Finalmente, los modelos que representan ciertos procesos en los organismo vivos, como el cultivo hidropónico y el cuerpo humano, permiten calcular un régimen de dosis de minerales óptimo para las plantas en caso particular, estimar la posible acumulación de minerales y correlacionar la concentración de minerales con posibles efectos a favor o en contra de la salud de la planta.

El sistema biológico cultivo hidropónico puede ser representado por los modelo descritos por la teoría compartimental, la cual lo describe, según López (2005), como una serie de compartimientos conectados reversiblemente unos con otros, es decir, como una forma de red de comunicación semejante a una red neuronal. El número de compartimientos que describe de la mejor manera la interacción entre el sistema hidropónico y la solución nutritiva es lo que categoriza el modelo. Entre estas categorías están: modelos monocompartmentales (1 compartimiento), bicompartimentales (2 compartimientos) y multicompartmentales (más de 2). En cada compartimiento la absorción es instantánea y homogénea, esto contrasta con la disposición directa de los minerales. Por otro lado, la concentración de nutrientes de un punto es representativa del resto del compartimiento. Para el caso que compete, se considera un modelo monocompartmental donde entra la concentración de nutrientes y sale una porción de la concentración que es eliminada por el organismo, lo que ocurre dentro del compartimiento está descrito por la ecuación diferencial adecuada, caso particular exponencial, lo que describe la proporción de nutrientes que llega al sistema y la proporción de nutrientes que se pierde.

4.1. Absorción del sodio

La absorción de un elemento presente en la solución nutritiva: el sodio. Según Carmassi (2007) y Sonneveld (2000), como se cito en Massa (2008), se estima al multiplicar la tasa de concentración de absorción del sodio por la tasa de absorción de agua por parte de la planta

$$W_U \cdot C_U = W_U \cdot \frac{I}{W_{UR}} = \text{número de moles absorbidos}$$

con C_U como la tasa de concentración de absorción de iones dados en $\left(\frac{mol}{m^3}\right)$

W_U dados en litros, es el volumen de agua absorbido por la planta durante un determinado periodo de tiempo t .

I es cualquier ion absorbido como número de moles absorbidos en un tiempo determinado (t_i).

W_{UR} es el agua absorbida en litros en el mismo tiempo (t_i).

La concentración de Na al final de cualquier período de cultivo se calcula como sigue:

$$[Na]_n = \frac{[Na]_{n-1} \cdot V_{n-1} - (C_U W_U)}{V_n}$$

$[Na]_{n-1}$ y $[Na]_n$ es respectivamente la concentración inicial y la concentración final de Na

V_{n-1} y V_n es respectivamente el volumen inicial y el volumen final de la solución nutritiva en el sistema.



Al introducir un volumen de concentración constante todo el tiempo dentro del sistema, es decir, $V_{n-1} = V_n$, entonces la ecuación anterior se convierte de la siguiente manera

$$[Na]_n = [Na]_{n-1} - \frac{(C_U W_U)}{V_S}$$

donde V_S es el volumen de la solución nutritiva recirculante. La tasa de concentración de absorción del sodio puede ser expresada por medio de la ecuación $C(t) = C_0 e^{-kt}$ con $C(t)$ como concentración de Na en t y C_0 como concentración inicial en el sistema. El k es un parámetro que se obtiene a partir de un proceso de regresión lineal de los datos experimentales. La tasa de absorción de H_2O por parte de la planta puede obtenerse a partir de los datos experimentales aplicando algún método de regresión lineal. La pregunta que surge y queda abierta es: ¿Se puede aplicar la estimación de la concentración de Na a cualquier otro elemento presente en la solución nutritiva?

4.2. Comparación entre el modelo de la dosis de un medicamento para un paciente y el comportamiento de la solución nutritiva en un cultivo hidropónico de lechuga

En el modelo $\frac{dC}{dt} = -kC$ con solución $C(t) = C_0 e^{-kt}$ la concentración inicial C_0 es la primera dosis de medicamento que se suministra al paciente; como se considera que la aplicación es por vía intravenosa o intravascular la concentración C_0 es la concentración más alta presente en la sangre y es alcanzada de manera inmediata por la velocidad del sistema circulatorio. Análogamente C_0 puede interpretarse como la concentración inicial de sales solubles que se agrega al agua, es decir, como los iones presentes de un determinado mineral en la solución nutritiva. Esta concentración depende de la cantidad en litros de agua que se utiliza para el número unidades de plantas en el sistema hidropónico, como también depende la primera dosis del medicamento del volumen de sangre que tiene el paciente y la disposición que tiene de permanecer en el plasma sanguíneo antes de la excreción.

Para la concentración inicial $C_0 = H - L$, H denota el nivel más alto seguro de minerales tolerables por la planta, pues para valores por encima de H según [Beltrano \(2015\)](#) la planta muere por envenenamiento o sobredosis de una solución nutricional desbalanceada. L es el nivel mínimo de requerimientos nutricionales para la planta. Como en el modelo del medicamento, en el cultivo sucede que la concentración residual $C(t)$ para cierto T tiende a caer exponencialmente hasta hacerse casi nula.

Existen dos tiempos t y T en el modelo de la dosis del medicamento. El t es el de evolución del sistema que permite encontrar la concentración de sangre en cualquier instante. El T es el que debe transcurrir para que la concentración en la sangre sea nula, es decir, el tiempo necesario para no exista residuos que interfieran con otra aplicación. Ahora bien, para el caso de la lechuga hidropónica, el tiempo t es la variable temporal de crecimiento de la lechuga, él depende de condiciones externas al cultivo como por ejemplo el ambiente circundante donde se desarrolle el cultivo, la temperatura también es un factor que influye en el cultivo, por lo que un aumento de ella en el agua provoca que las raíces de la planta no capturen su alimento.



k viene siendo la constante de eliminación de minerales en la solución nutritiva, también llamada la constante de absorción de nutrientes. El valor de la constante puede ser expresada como la probabilidad que tiene una molécula del mineral en ser absorbida por el sistema celular de la planta en la unidad de tiempo T . Armijo (1997) afirma: “ (...) cuanto más rápida sea la absorción de un fármaco, mayor será su constante de absorción y menor su semivida de absorción” (p.54). Para las moléculas de los minerales en el cultivo hidropónico se puede plantear lo que propone Armijo (1997):

(...) el número de moléculas que se absorbe en la unidad de tiempo disminuye con el tiempo de forma exponencial. Dicha curva exponencial puede representarse como una recta si se representan las concentraciones en una escala semilogarítmica, siendo la constante de absorción la pendiente de dicha recta (...) Es característica de la mayor parte de las formas farmacéuticas en las que la totalidad de las moléculas administradas están inicialmente disponibles para absorberse, disminuyendo a medida que se van absorbiendo (p.55).

Lo anterior puede formularse para el caso de los cultivos hidropónicos ya que al suministrarse los nutrientes directamente sobre el agua, los elementos están inicialmente disponibles para ser absorbidos por la forma iónica que presentan. Finalmente otro aporte significativo para los cultivos hidropónicos y que resalta Armijo (1997) es:

(...) La cantidad absorbida se considera que es igual a la administrada cuando el fármaco se administra por vía intravascular y suele expresarse mediante el área bajo la curva de concentraciones plasmáticas. Este área suele calcularse por el método trapezoidal a partir de las concentraciones plasmáticas obtenidas a diferentes tiempos. Por cualquier otra vía es posible que la cantidad absorbida sea inferior a la dosis administrada debido a la preparación farmacéutica y a la eliminación presistémica. (p.55)

Capítulo 5

Conclusiones

1. Al recopilar parte de la información necesaria para entender el comportamiento del cultivo hidropónico, se concluye que: son cuantiosas las variables que intervienen en la dinámica del cultivo, es decir, se trata de un sistema artificial con algunos procesos lineales como lo es el decaimiento de la concentración de nutrientes, pero también con procesos no-lineales como lo es el crecimiento de la planta.
2. Al comparar las variables del cultivo antes mencionado con las variables del modelo del medicamento, el valor k depende de la probabilidad de absorción del mineral. Por otro lado, la concentración inicial en el proceso de eliminación depende de los requerimientos propios de la variedad de planta que se va utilizar, ya que los diferentes cultivos tienen un patrón de absorción de nutrientes diferentes.
3. Encontrar una expresión matemática para la tasa de eliminación de minerales en el cultivo hidropónico es muy similar al caso del medicamento en la sangre, siempre y cuando la vía de administración del fármaco sea intravascular.
4. Los sistemas dinámicos en la hidroponía así como en la farmacocinética son temas de trabajo para futuras investigaciones, por el momento se concluye que la eliminación de minerales tiene un decaimiento similar al que ocurre en los modelos de absorción de Lambert, desintegración radioactiva, enfriamiento de Newton y propagación de una medicina.
5. H : es el nivel más alto de minerales tolerables por la planta. Es decir la idea es hacer que la concentración en el agua tienda a H . L : es el nivel más bajo de minerales que necesita la planta para poder vivir. Entonces según el modelo de la prescripción de un medicamento T debe ser el tiempo de aplicación de minerales antes de que la concentración inicial C_0 llegue por debajo de L . Por tanto, una optimización para la tasa de eliminación de concentraciones de minerales, se traduce en encontrar una concentración dentro del intervalo $[H, L]$, siendo este un intervalo seguro para que la planta se desarrolle en plenitud. En caso particular de que la concentración de minerales β no se acumula en el sistema hidropónico, se deja que las lechugas extraigan los minerales del agua hasta llegar casi a L . $\lim \beta = L$ cuando $t \rightarrow T$.

Referencias

- Aracil, J. y. G. F. (2007). *Dinámica de sistemas*. Alianza Universidad Textos. 2
- Armijo, J. A. (1997). *Absorción, Distribución y Eliminación de los fármacos*. Universidad de Cantabria, Facultad de Medicina, Revista: Farmacología Humana, tercera edición, Masson-S.A. 20, 35, 36, 40
- Beltrano, J. (2015). *Cultivo en Hidropónia, Libros de cátedra, Facultad de ciencias agrarias y forestales*. Editorial de la Universidad Nacional de La Plata (EDULP). 1, 27, 29, 30, 31, 34, 35, 39
- Campmany, M. E. (Mayo 2006). *Dosificación y márgenes terapéuticos: Causas y detención de problemas*. OFFARM, Vol 25 Núm 5. 18
- Carmassi, G. (2007). *An aggregated model for water requirements of greenhouse tomato grown in closed rockwool culture with saline water*. *Agric. Water Manage.* Agric. Water Manage. 38
- Cruz, I. L. (December 2005). *MATHEMATICAL MODELS OF VEGETABLES IN GREENHOUSES: BEYOND A CONTEMPLATIVE VIEW OF CROP DYNAMICS*. Ciencias Forestales y del Ambiente Vol. 11, issue 2 July. Revista Chapingo, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA CHAPINGO. 5
- López, A. M. (2018). *Ecuaciones diferenciales en farmacocinética*. Rev. Real Academia de Ciencias. Zaragoza, ISSN: 0370-3207. 8, 20
- López, D. P. (2005). *Modelado y Simulación de Sistemas Farmacocinéticos, Trabajo de grado en Ingeniería de sistemas bajo dirección del profesor Luis Alfonso Dávila*. Universidad de los Andes, Facultad de Ingeniería, Escuela de Sistemas. 38
- Massa, D. (2008). *An empirical model to simulate sodium absorption in roses growing in a hydroponic system*. *Scientia Horticulturae* 118. 38
- Molina, E. (2006). *Evaluación de la Fertilidad del Suelo y el Estado Nutricional de las Plantas. In Seminario: Fertirrigación de Cultivos*. Semillas para el Futuro. 36
- Polanía, Q. L. A. (2011). *Un Enfoque Cualitativo a las EDO'S y la Teoría Wavelets*. Universidad Surcolombiana. IV, v, 2, 7, 9, 20
- Sonneveld, C. (2000). *Effect of salinity on substrate grown vegetables and ornamentals in greenhouse horticulture*. PhD Thesis. Wageningen University, Wageningen. 38
- Soto, F. (2004). *Hidroponía*. Instituto Nacional de Aprendizaje, Curso de Hidroponía, Universidad de costa rica. 35

- Thornley, J. H. M. and Johnson, I. R. (2000). *Plant and Crop Modelling: A Mathematical Approach to Plant and Crop Physiology*. The Blackburn Press. 5
- Valverde, A. J. P. (2013). *Establecimiento de curvas de absorción para dos tipos de lechuga bajo el sistema hidropónico NFT modificado*. Trabajo de grado en ingeniería agronómica, Escuela de agronomía, Facultad de ciencias agroalimentarias, Universidad de costa rica. 35, 36
- Zill, G. D. (2009). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones al Modelado*. Novena edición, Loyola Marymount University, Cengage Learning. 26



Capítulo 6

Bibliografía complementaria

- [1] Beltrano, José. Giménez O. Daniel (coordinadores). Cultivo en Hidroponía, libros de cátedra, Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales, Universidad Nacional de la Plata, Argentina, editorial de la universidad de la plata, Pág.8.

- [2] Polanía Quiza, Luis Arturo. Un Enfoque Cualitativo a las EDO'S y Teoría Wavelets, Grupo de investigación DINUSCO, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemáticas y estadística, Universidad Surcolombiana, editorial Usco, primera edición, 2011 Neiva, Colombia. Pág. 35.

- [3] Ramirez C., Luz Arabany. Teoría de sistemas, Ingeniería de sistemas, Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales, 2002, Pág. 22.

- [4] Marcelo Arnold, Ph.D. y Francisco Osorio. Introducción a los Conceptos Básicos de la Teoría General de Sistemas, M.A. Departamento de Antropología. Universidad de Chile.1998.

- [5] Alzate, Alonso Tamayo. Teoría General de Sistemas, Universidad Nacional de Colombia sede Manizales depto. de ciencias 1999.

- [6] Bertoglio, Oscar Johansen. Introducción a la Teoría General de Sistemas. Editorial Limusa. Noriega Editores. 1994.

- [7] Curay, Alba Magaly Cajo. Producción Hidropónica De Tres Variedades De Lechuga, Bajo El Sistema NFT, Con Tres Soluciones Nutritivas. Proyecto de Investigación, Universidad Técnica De Ambato, Facultad De Ciencias Agropecuarias, Ecuador, 2016.

- [8] Tlahque, Jorge Gutiérrez. Producción Hidropónica De Lechuga con y sin Recirculación De Solución Nutritiva. , tesis de grado, Universidad Autónoma de Chapingo, Instituto de Horticultura, México, 2011.

- [9] Modelos Matemáticos en Biología, Universidad de Jaén, Departamento de matemáticas, 2009.
- [10] Evaluación De Sustratos En Un Cultivo De Lechuga Bajo Un Sistema Hidropónico En El Municipio De Pasto, Elizabeth Marcela Guerrero; Juan Camilo Revelo ; Orlando Benavides; Germán Chaves; Carlos Álvaro Moncayo, Revista de ciencias agrícolas , volumen 31.
- [11] Keshet, Leah Edelstein. Mathematical Models in Biology, Classics, In Applied Mathematics, University of British Columbia, Vancouver, British, editorial Board, Siam, 2005.
- [12] Blanchard, Paul. Devaney, Rober L. Hall, Glen R. Ecuaciones diferenciales, Boston University, International Thomson editores, 1999.
- [13] Tlahque, Jorge Gutierrez. Producción Hidropónica con y sin Recirculación de Solución Nutritiva. Universidad Autónoma de Chapingo, Departamento de Fitotecnia, Instituto de Horticultura, Tesis de Maestría en Ciencias en Horticultura. Chapingo, México, Diciembre de 2011.
- [14] Bocco, Monica. Funciones elementales para construir modelos matemáticos. Colección “Las ciencias naturales y la matemática”. Ministerio de educación, Instituto nacional de educación tecnológica, Buenos aires, Argentina. 2010.
- [15] Universidad de JAÉN. Modelos matemáticos en biología, Teoría, Departamento de matemáticas, Jaén, 8 de enero de 2009.
- [16] Guerrero, Elizabeth Marcela. Revelo, Juan Camilo. Benavides B, Orlando. Chaves J, Germán. Moncayo, Carlos Álvaro. Evaluación de sustratos en un cultivo de lechuga bajo un sistema hidropónico en el municipio de Pasto. Revista de ciencias agrícolas. Volumen 31(1):3-16. Segundo semestre. Universidad de Nariño, Pasto, Colombia. Enero- Junio de 2014.
- [17] Reyes Tigse, Colón Alfredo. Evaluación de híbridos de tomate(Lycopersicon esculentum Mill) en hidropónia aplicando bioestimulantes Jisamar en el cantión la libertad. Tesis de grado para obtención del titulo de ingeniero agropecuario. Universidad estatal península de santa Elena. Facultad de ciencias agrarias, Escuela de ingeniería agronómica. La libertad, Ecuador. 2009.
- [18] Barrios Arreaga, Nidia Esperanza. Evaluación del Cultivo de lechuga, Lactuca sativa L. bajo condiciones hidropónicas en Pachalí, San Juan sacatepéquez, Guatemala. Tesis, Universidad de San Carlos de Guatemala, Facultad de Agronomía, Instituto de investigaciones agronómicas. Agosto de 2004.
- [19] Marinelli, Marcelo. Lombardo, Graciela. Kornuta, Carlos. Wurn, Guillermo. Solonezen, Lisandro. Cichanowski, Miguel Alejandro. Automatización de sistemas de cultivos hidropónicos. Universidad Nacional de Misiones, Facultad de ciencias exactas químicas y naturales, Departamento de informática. s.f.



- [20] Escobar A, Jaime. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones en Maple. Universidad de Antioquia, Instituto de matemáticas. s.f.
- [21] Cruz, I.L. Lopez; Arias, A. Ramírez; Aguilar Rojano, A. MODELOS MATEMÁTICOS DE HORTALIZAS EN INVERNADERO: TRASCENDIENDO LA CONTEMPLACIÓN DE LA DINÁMICA DE CULTIVOS. Revista Chapingo Serie Horticultura. 2005
- [22] Rodríguez, Lourdes. Torres, Verena. Martínez, R.O. Jay, O. Noda, Aida C. Herrera Magaly. Modelos para estimar la dinámica de crecimiento de *Pennisetum purpureum* vc.Cuba CT-169. Revista Cubana de Ciencias Agrícolas, Tomo 45, Número 4. 2011.
- [23] Jiménez Morales, Victorino D. . Trejo Téllez, Libia I. . Gómez Merino, Fernando C. . Volke Haller, Víctor H. . MODELOS DE SIMULACIÓN DEL CRECIMIENTO DE LECHUGAS EN RESPUESTA A LA FERTILIZACIÓN ORGÁNICA Y MINERAL. Nota científica, Rev. Fitotec. Mex. Vol. 37 (3):249-254, 2014.
- [24] Trinidad Bello, Adalberto. MODELOS DE CRECIMIENTO EN BIOLOGÍA Y SELECCIÓN DEL MODELO POR SU AJUSTE. Tesis de maestría en ciencias matemáticas aplicadas e industriales. Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa. División de ciencias Básicas e Ingenierías. México D.F, Junio de 2014.
- [25] Solorio Elizalde, Nahielli. Paz Pellat, Fernando. Odi Lara, Magali. Bolaños González, Martín A. . Modelo expo-lineal del crecimiento y equivalencia de la productividad de un tomate cultivado en invernadero. Sociedad Mexicana de la ciencia del suelo, Terra Latinoamericana, vol.27, num.2, 2009.
- [26] Arcila, purgarint. Robledo, Alvaro Jaramillo. Larsen, Lars Otto. Nota técnica - Un modelo para evaluar la influencia del clima en la producción de café. Cenicafé, 22-26.1992.
- [27] Zill, Dennis G. . Loyola Marymount University. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones al Modelado, Novena edición, Cengage Learning, 2009.
- [28] Margulis, Lynn. Sagan, Dorion. El Proceso de Nutrición en las Plantas. s.f.
- [29] Valverde Alvarado, José Pablo. Establecimiento de curvas de absorción para dos tipos de lechuga bajo el sistema hidropónico de NFT modificado. Tesis para optar al grado de Licenciatura en Ingeniería Agronómica con énfasis en Fitotecnia. Escuela de Agronomía, Facultad de Ciencias Agroalimentarias, Universidad de Costa Rica. 2013.
- [30] Viseras Iborra, María Teresa. Desarrollo Galénico de Preparados Obtenidos por Interacción del Ácido 5-Amino Salicílico con Halloysita. Tesis doctoral, Universidad de Granada, Facultad de Farmacia, Departamento de Farmacia y Tecnología Farmacéutica. 2008.



- [31] Vaázquez Ybarra, Jorge A. . Peña Valdivia, Cecilia B. . Trejo, Carlos. Villegas Bastida Albino. Valdéz, Sergio Benedicto. Sánchez García, Prometeo. PROMOCIÓN DEL CRECIMIENTO DE PLANTAS DE LECHUGA (*Lactuca sativa* L.) CON DOSIS SUBLETALES DE OZONO APLICADAS AL MEDIO DE CULTIVO. *Rev. Fitotec. Mex.* Vol. 38(4) 405-413, 2015.
- [32] Nicholson, Walter. *Teoría Microeconomica- Principios Básicos y Ampliaciones*, novena edición, Cengage Learning, México D.F. 2008.
- [33] López, Miguel Andériz. Ecuaciones diferenciales en farmacocinética. *Rev. Real Academia de Medicina de Zaragoza*, ISSN:0370-32. España. 2018.
- [34] Aracil, Javier. Gordillo, Francisco. *Dinámica de sistemas*. Editorial Alianza, Universidad textos. Madrid, 2007.
- [35] Santos Coello, Belarmino. Ríos Mesa, Domingo. *Cálculo de Soluciones Nutritivas En suelo y sin suelo*. Primera Edición. Diciembre de 2016.