Neiva, 02 de septiembre 2021

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

Germán Eduardo Polanía Alarcón, con C.C. No. 1.075.292.604,

Julián Camilo Cante Suaza, con C.C. No. 1.075.296.453

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado titulado solución numérica del modelo de Black-Scholes mediante diferencia finita presentado y aprobado en el año 2021 como requisito para optar al título de

Matemático.

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores” , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma:

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma:

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Solución numérica del modelo de Black-Scholes mediante diferencia finita

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Polanía Alarcón	Germán Eduardo
Cante Suaza	Julián Camilo

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Duarte Vidal	Julio Cesar

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Morales Mosquera	Diego Armando
Cangrejo Esquivel	Álvaro Javier

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Matemático

FACULTAD: Ciencias Exactas

PROGRAMA O POSGRADO: Matemáticas Aplicadas

CIUDAD: **Neiva** **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2021 **NÚMERO DE PÁGINAS: 97**

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**):

Diagramas___ Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general__X_ Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros__

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: Microsoft office

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*:

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

	Español	Inglés		Español	Inglés
1.	**Volatilidad implícita**	**Implicit volatility**	6.	**Aproximación Numérica**	**Numerical Approximatio**
2.	**Modelo estocástico**	**Stochastic models**	7.	____________	______________
3.	**Opciones Europeas**	**European options**	8.	____________	____________
4.	**Discretización**	**Discretization**	9.	____________	__________
5.	**Diferencia Finita**	**Finite difference**	10.	____________	____________

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

La ecuación de Black-Scholes es una ecuación en derivadas parciales estocástica basada en la teoría de procesos estocásticos. Es utilizada para calcular el precio teórico actual de un mercado de opciones europeas en compra (call) o venta (put) de acciones, haciendo caso omiso de los dividendos pagados durante la vida de la opción. Se requiere encontrar una solución numérica a la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes, haciendo uso del método de diferencias finitas. Se realiza una discretización por el comportamiento errático de las opciones Europeas con sus condiciones iniciales;

esto implica, la relevancia en este trabajo, al sustituir las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas por Ecuaciones en Diferencia, sentido que le da un valor agregado a este trabajo que son modelos que últimamente se han venido trabajando y así encontramos valores para decidir en la compra o venta de opciones.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

The Black-Scholes equation is a stochastic partial derivative equation based on the theory of stochastic processes. It is used to calculate the current theoretical price of a European options market in purchase (call) or sale (put) of shares, ignoring the dividends paid during the life of the option. It is required to find a numerical solution to the partial differential equation of Black-Scholes, making use of the finite difference method. A discretization is carried out due to the erratic behavior of the European options with their initial conditions; This implies that stochastic differential equations are replaced by difference equations. Additionally, using an algorithm in Matlab you can find values to decide on the purchase or sale of options.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: Diego Armando Morales Mosquera

Firma:

Nombre Jurado: Álvaro Javier Cangrejo Esquivel

Firma:

ACTA DE SUSTENTACIÓN

Fecha : Neiva, Agosto 30 de 2021

Hora : De: 3:05 p.m. a 4:00 p.m.

Título : "Solución numérica del modelo Black-Scholes mediante diferencia finita"

Autores : Julián Camilo Cante Suaza código 20122114350

: German Eduardo Polanía Alarcón código 20122111890

ORDEN DEL DIA:

Para la sustentación del proyecto de grado se reunieron por medio de link https://meet.google.com/tap-hkov-man

Los abajo firmantes quienes conforman el equipo evaluador.

*El estudiante presentó el proyecto de grado cumpliendo con todos los requisitos exigidos el cual fue revisado previamente por el jurado.

*Teniendo en cuenta lo anterior, se procedió a la sustentación disponiendo del siguiente tiempo:

30 minutos para la sustentación del tema.

10 minutos para responder las preguntas del jurado.

*Para la asignación de la evaluación del proyecto de grado se toma el concepto de los jurados del trabajo escrito con la sustentación para obtener una evaluación definitiva y asignar la correspondiente decisión.

Aprobado : __APROBADO___________

No aprobado : ________________________

Observaciones de la Sustentación:

Entregar el trabado de grado empastado y un CD, para seguir con el trámite para derechos de grado en ceremonia privada.

En constancia se firma:

JULIO CESAR DUARTE VIDAL

Nombre docente tutor | Firma del docente tutor

DIEGO ARMANDO MORALES MOSQUERA

Nombre Jurado No.1 | Firma del Jurado No.1

ALVARO JAVIER CANGREJO ESQUIVEL

Nombre Jurado No.2 | Firma del Jurado No.2

Vo. Bo. GERMAN ESCOBAR FIESCO
Jefe del Programa Matemática Aplicada

Universidad Surcolombiana

Facultad de Ciencias Exactas

Solución numérica del modelo de Black-Scholes mediante diferencia finíta

T R A B A J O - D E - G R A D O

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

P R E S E N T A :

Germán Eduardo Polanía Alarcón
Julián Camilo Cante Suaza

TUTOR

Julio César Duarte Vidal

Neiva-Huila-Colombia, 2021

Agradecimientos

- **Germán Eduardo Polanía:** En especial doy las gracias a nuestra familia por el apoyo y paciencia, también le agradezco al profesor Julio César Duarte Vidal por su asesoría y al programa por su apoyo y conocimientos dados a mi formacion, sede Neiva.

- **Julián Camilo Cante Suaza:** Expreso mi agradecimiento al profesor Julio César Duarte Vidal por su asesoría y apoyo que ha brindado a este trabajo, por el respeto a mis sugerencias e ideas. Ademas darle gracias al programa matemática aplicada y gracias a mi familia por su apoyo y confianza.

Índice general

Índice de figuras

Resumen

La ecuación de Black-Scholes es una ecuación en derivadas parciales estocástica basada en la teoría de procesos estocásticos. Es utilizada para calcular el precio teórico actual de un mercado de opciones europeas en compra (call) o venta (put) de acciones, haciendo caso omiso de los dividendos pagados durante la vida de la opción. Se requiere encontrar una solución numérica a la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes, haciendo uso del método de diferencias finitas. Se realiza una discretización por el comportamiento errático de las opciones Europeas con sus condiciones iniciales; esto implica, la relevancia en este trabajo, al sustituir las Ecuaciones Diferenciales Estocasticas por Ecuaciones en Diferencia, sentido que le da un valor agregado a este trabajo que son modelos que ultimamente se han venido trabajando y asi encontramos valores para decidir en la compra o venta de opciones.

Abstract

The Black-Scholes equation is a stochastic partial derivative equation based on the theory of stochastic processes. It is used to calculate the current theoretical price of a European options market in purchase (call) or sale (put) of shares, ignoring the dividends paid during the life of the option. It is required to find a numerical solution to the partial differential equation of Black-Scholes, making use of the finite difference method. A discretization is carried out due to the erratic behavior of the European options with their initial conditions; This implies that stochastic differential equations are replaced by difference equations. Additionally, using an algorithm in Matlab you can find values to decide on the purchase or sale of options.

Introducción

Este proyecto propone una visión alternativa a solucionar nuestra ecuación de Black-Scholes, teniendo en cuenta los supuestos y lo general de nuestro modelo, sin descuidar la importancia. Para ello utilizaremos el método de diferencia finitas, el cual es un método planteado por varios matemáticos unidos a esta idea, crearon el Cálculo Variacional y junto a Taylor quien fué un matemático Inglés, que añade una nueva rama de las matemáticas que ahora se llama el cálculo de diferencias finitas, quién además inventó la integración por partes, y descubrió la famosa fórmula conocida como la expansión de Taylor. Muchos de ellos han usado métodos de aproximación (lo que hoy llamamos "métodos numéricos") para distintos objetivos, uno de ellos es demostrar existencia de solución.

En el primer capítulo, hablaremos de las Generalidades en este proyecto, donde plantearemos el sentido de este proyecto. En el segundo capítulo hablarémos de los pilares que conforma este proyecto. En consecuencia, se da conceptos basicos en la economía, para obtener un lenguaje preciso hacia los mercados futuros y opcionales. Necesitando los tópicos en la teoría de la Probabilidad, dando así las definiciones de Distribución Normal, Normal Estandar y Lognormal. Resaltando los mercados, donde se negocian los denominados "derivados financieros" por medio de un contrato de futuros u opciones financieras a partír de un acuerdo de compra y venta de algún activo. Observando los comportamientos aleatorio que se obtiene en los mercados financieros, dando vida al tercer capítulo Cálculo Estocastico, donde se abarca los caminos aleatorios de Precio de Activos, Movimientos Browniano, Integrales Estocásticas y Lema de Itô. El cual modela procesos estocásticos y sus aplicaciones en las finanzas. Al comienzo de la década de los 70, Frischer Black, Myron Scholes y Roberto Merton, hicieron un gran aporte a las finanzas especialmente en los mercados de opciones. Se le atribuye el modelo de Black-Scholes que se desarrolla en el capítulo cuarto, en el cual se analiza la formula de Black-Scholes para opciones de call y put de tipo Europeo, volatilidad implícita, dedución de la ecuación diferenciales parciales de Black-Scholes y usando la famosa ecuación de difusión mediante la transformada de fourier. Utilizando una herramienta importante como lo es el Método de Diferencia Finita que esta enfocado el quinto capítulo, puesto que permite discretizar ecuaciones diferenciales y desarrollar un proceso más simple del problema. Se realiza la dedución de las formulas de Diferencia Finita, Aplicación de la serie de Taylor y Metodo de coeficiente indeterminado. Así mismo se desarrolla el capitulo seis que se enfoca en la solución del Modelo de Black-Scholes por el Método de diferencia finita, donde se reemplaza las ecuaciones diferenciales estocasticas por ecuaciones en diferencia y mediante un algoritmo de matlab, encontramos una aproximación numérica.

Capítulo 1

Generalidades

1.1. Objetivo General

Aplicar el método de diferencias finitas para encontrar soluciones numéricas al modelo de BLACK-SCHOLES.

1.1.1. Objetivo Específico

- Interpretar el modelo de Black-Scholes.
- Encontrar una aproximación de la solución de la ecuación de Black-Scholes.
- Simulación del Modelo Black-Scholes, implementando algoritmos en Matlab.

1.2. Planteamiento del Problema

La ecuación de Black-Scholes, es muy reconocida en la aplicación de la teoría de las E.D.E (Ecuaciones Diferenciales Estocástica). La economía financiera, estudia los mercados de activos financieros con un grado incertidumbre, es decir, el riesgo de la toma de decisiones (opciones) con respecto al valor de los derivados, el cual es difícil de modelar, dado que en la bolsa de valores los precios de las acciones varian constantemente a través del tiempo y se hace difícil realizar una valoración de las acciones por medio de las opciones europeas para la toma decisiones de dichos valores fluctuantes.

El método numérico de Diferencias finitas fue creado hace algunas décadas y ha sido muy útil en las soluciones numéricas de las ecuaciones diferenciales parciales y en las últimas investigaciones y publicaciones, hemos visto su aplicación en las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas, ya que por su simplicidad permite **discretizar** dichas ecuaciones diferenciales estocasticas y permitir un tratamiento más simple del problema diferencial parcial, es decir, convertir el problema de una EDE a un sistema lineal, allí es donde se hace versátil el método. Por otro lado, teniendo en cuenta las condiciones (cambio y volatilidad) encontradas en el modelo de Black-Scholes en la opción Europea, se hace difícil encontrar una solución. ¿Es posible encontrar soluciones numéricas con el método de Diferencias Finitas, que se adapten a estos procesos de la economía cambiante?

1.3. Pregunta de Investigación

¿Es posible encontrar soluciones numéricas de la Ecuación Black-Scholes a través del método de diferencias finitas? ¿Realmente el método de Diferencias Finitas se adapta en la aplicacion de dicho Modelo?

1.4. Justificación

El modelo Black-Scholes es una fórmula utilizada para modelar el precio de una opción financiera, es decir, y es importante y aunque es una herramienta concreta y eficiente para analizar el comportamiento cualitativo que toma el valor del activo subyacente a travéz de un tiempo definido en una opcion europea. La importancia de este proyecto es plasmar resultados de la resolución del metodo numerico, método de diferencia finita, en base de esto se requirion 3 grandes pasos: discretización, aproximación y la solución. Además usando el modelo de Black-scholes, el cuál, facilita la valuación de una opción europea call (compra) o put(Venta) e implementando algoritmos en el software maltab, podemos llegar a una solución aproximada del problema.

Capítulo 2

Introducción a los mercados futuros y opciones

Este tipo de estudios se desarrolló a finales del siglo XIX. No obstante, fue en el siguiente siglo en el que nuevos modelos y los avances de estudio económico destacaron, en especial con el trabajo de Fischer Black y Myron Scholes en los años 70. La Valoración de opciones financieras es una corriente de estudio económica que se encarga del estudio de este tipo de activos financieros, cuya rentabilidad depende de otros activos o de sus precios y en un marco de probabilidad, producto al cual dichos activos subyacentes han experimentado en las últimas décadas un pronunciado avance, con su correspondiente modificación y desarrollo debido a la significativa evolución en el mismo periodo de los distintos activos financieros que han ido apareciendo en el mercado, cada vez más complejos. Es decir, se han producido nuevas necesidades de valoración.

2.1. Definiciones básicas

Esta sección vamos a dar conceptos basicos en la economía financiera.

Activo: Un activo financiero es cualquier valor negociable, es decir, que se pueda comprar y vender, y que da derecho a una participación o inversión en el capital de una empresa, bien sea en forma de prestamo o de participació en la sociedad.

Acción: Una acción es una participación en el capital social de una sociedad o una empresa, que da a su propietario (al accionista) derecho a percibir parte de los beneficios de la misma (dividendos). Puede cotizar en la bolsa o no y su valor fluctúa dependiendo del valor de la empresa, del estado del sector de actividad en el que opere y del estado de la economía.

Bienes: Son propiedades tangibles de una empresa y recursos con los que cuenta una negociación o empresa para su uso y explotación, se expresa su valor en terminos monetarios.

Derivado: Un derivado financiero es un producto financiero cuyo valor se basa en el precio de otro activo diferente. El activo del que depende tomo el nombre de activo subyacente y el activo dependiente el de derivado.

Coberturista: El objetivo de un coberturista (hedger) es cubrir el riesgo que afronta ante potenciales movimientos en un mercado variable.

Especulador: Los especuladores, utilizan los derivados para apostar acerca de la dirección futura de los mercados y tratar de obtener beneficio de esas tendencias "previstas".

Opción: Una opción es un instrumento financiero derivado que se establece en un contrato que le dan a su comprador el derecho pero no la obligación, a comprar o vender el activo subyacente a un precio determinado, strike o precio de ejercicio, una fecha concreta (vencimiento) fijado en el contrato.

Volatilidad: La volatilidad es una medida de la frecuencia e intensidad de los cambios del precio de un activo.

Payoff: El payoff es el valor de la opción al vencimiento que es desconocido en el momento de firma del contrato.

Portafolio: Conjunto de los activos financieros en los cuales invierte una persona o una empresa, incluyendo todos aquellos activos que implíca un capital del que se espera obtener un cierto rendimiento.

Venta en corto: Es la práctica de venta de activos que no se poseen y han de tomarse en préstamo de un tercero.

Tasa de interés: Es el porcentaje al que esta invertido un capital en una unidad de tiempo. La tasa de interés representa un balance entre el riesgo y la posible ganancia de la utilización de una suma de dinero en una situación y tiempo determinado.

Contrato de futuros: Acuerdo de vender y comprar un activo en una fecha futura específica, es decir, es un acuerdo estandarizado por el que dos partes se comprometen a intercambiar un activo (físico o financiero), a un precio determinado en una fecha futura.

Posición larga en un contrato de futuros: El comprador del activo subyacente ostenta el derecho a recibir el mismo activo negociado en la fecha de vencimiento acordada en el contrato. La posición larga en los futuros es usada para conseguir importantes plusvalías (Aumento del valor de una cosa, especialmente un bien inmueble, por circunstancias extrínsecas e independientes de cualquier mejora realizada en ella) con la compra del activo para su posterior reventa a mayor precio.

Posición corta en un contrato de futuros: El vendedor del contrato tiene que entregar el activo subyacente en una fecha acordada, siendo a cambio retribuido por ello en la fecha de venta establecida entre las dos partes. La posición corta se utiliza en los mercados de derivados para mejorar la financiación.

Precio de futuros: Precio al que se acuerda un contrato.

Precio spot: El precio spot, o precio al contado, es el precio que se paga al momento para una entrega inmediata de una materia prima, divisa u otro instrumento financiero. Es lo contrario de un precio a futuro, en el que el que la entrega se fija a varias semanas o meses de la fecha actual, que es cuando se liquidará la operación.

Mercado over-the-counter(OTC): Conocido como OTC o extrabursátil, está compuesto por una red electrónica, donde las partes negocian distintos contratos financieros. En dichas transacciones, se pueden negociar inversiones en divisas, commodities, bonos, futuros, ..., etc. Estas operaciones se llevan a cabo entre bancos, brokers, instituciones financieras y clientes corporativos. La principal ventaja de operar en el mercado OTC es que se puede negociar con la otra parte un contrato que sea de beneficio mutuo. Como desventaja no olvidemos que al no existir un órgano regulador, alguna de las partes puede que no cumpla con el contrato. Por eso, es fundamental buscar intermediarios con todas las licencias para prestar servicios de corretaje financiero.

Opción de compra: Una opción de compra (opción call) es un derivado financiero que otorga al comprador el derecho (pero no la obligación) de comprar en el futuro un activo al vendedor de la opción a un precio determinado previamente. El dueño o comprador de una opción call se beneficia de la opción si el activo subyacente sube, es decir, si cuando llega la fecha de vencimiento de la opción call, el activo (una acción por ejemplo) tiene un precio mayor que el precio acordado. En ese caso, el comprador de la opción ejercerá su derecho y comprará el activo al precio acordado y lo venderá al precio actual de mercado, ganando la diferencia.

Opción de venta: Una opción put es una opción de venta. Otorga al comprador el derecho (pero no la obligación) de vender en el futuro un activo al vendedor de la opción a un precio determinado previamente. El dueño o comprador de una opción put se beneficia de la opción si el activo subyacente baja, es decir, si cuando llega la fecha de vencimiento de la opción put, el activo (una acción por ejemplo) tiene un precio menor que el precio acordado. En ese caso, el comprador de la opción ejercerá su derecho y venderá el activo al precio acordado y después lo comprará al precio actual de mercado, ganando la diferencia.

Precio de ejercicio o precio strike: Precio fijado al cual el propietario de la opción puede comprar (en el caso de una opción de compra), o vender (en el caso de una opción de venta), el valor o mercancía subyacente. Es una variable clave en un contrato de derivados entre dos partes. Donde el contrato requiere la entrega del instrumento subyacente, el comercio se realiza al precio de strike, independientemente del tipo de cambio spot (precio de mercado) del instrumento subyacente en ese instante.

Fecha de vencimiento: Fecha estipulada en el contrato u opción.

Opción europea: Únicamente se pueden ejercer en una fecha determinada (fecha de ejercicio). Por ello, tanto el comprador como el vendedor deberán esperar a la fecha de vencimiento para determinar si la opción se encuentra en dinero o no.

Opción americana: Pueden ser ejercidas a lo largo de su vida en cualquier momento hasta la fecha de ejercicio por aquel que tiene el derecho, es decir, el que está comprado.

Expedir la opción: Venta de una opción.

2.2. Tópicos en Teoría de la Probabilidad

Con la caída de Constantinopla se da por terminado la edad media y emergen la etapa conocida como renacimiento, predominaron las actividades mercantil, industrial, artística, arquitectónica, intelectual y científica, entre otras. Sin embargo, fueron Pascal y Fermat los que empezaron a formalizar la teoría de las probabilidades, probando el desacuerdo con el caballero de Meré, este se debía a que era erróneo el cálculo que había efectuado, ya que se equivocó en considerar equiprobables sucesos que no lo eran, y sólo cuando los casos posibles son equiprobables tiene sentido aplicar la definición dada por Meré de probabilidad. La probabilidad es una estrategia mediante la cual se intenta estimar la frecuencia con la que se obtiene un cierto resultado en el marco de una experiencia en la que se conocen todos los resultados posibles.

Definición 2.2.1 (Espacio Medible)**.** *Sean $\Omega \neq \emptyset$ y f una σ-álgebra sobre Ω. La pareja (Ω, f) se llama espacio medible. Es claro, a partir de la definición,que Ω y $\emptyset$ pertenecen a cualquier σ-álgebra definida sobre Ω . Ω se llama eventos seguros y $\emptyset$ se llama eventos imposibles.Un evento de la forma $\{w\}$ como $w \in \Omega$ se llama evento elemental. Decir que un evento A ocurre significa que el resultado obtenido, al realizar* *el experimento aleatorio cuyo espacio muestral es Ω, es un elemento de A. Por lo tanto si A y B son eventos entonces: [1]*

1. *$A \cup B$ es un evento que ocurre, si y solo si, A o B o ambos ocurren.*
2. *$A \cap B$ es un evento que ocurre, si y solo si, si A y B ocurren.*
3. *A^c es un evento que ocurre,si y solo si, A no ocurre.*
4. *A-B es un evento que ocurre, si y solo si, A ocurre pero B no.*

Definición 2.2.2. *Dos eventos A y B se dicen mutuamente excluyentes si $A \cap B = \emptyset$.[1]*

Definición 2.2.3 (Frecuencia Relativa)**.** *Para cada evento A, el número $fr(A) := \frac{n(A)}{n}$, se llama frecuencia relativa de A, donde $n(A)$ indica el número de veces que ocurre el evento A.[1]*

Definición 2.2.4 (Espacio de Probabilidad)**.** *Sea (Ω, F) un espacio medible. Una función P definida sobre F y de valor real que satisface las siguientes condicion*

1. *$P(A) \geq 0$ para todo $A \in F$.*
2. *P(Ω)$= 1$*
3. *Si $A_1, A_2, \ldots$ son elementos de F mutuamente excluyentes, esto es*
$$A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ para todo } i \neq j$$
Entonces
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Se llama medida de probabilidad sobre (Ω, F). La tripleta (Ω, F, P) se llama espacio de probabilidad [1]

2.2.1. Distribución Normal

La distribución normal es una de las más importantes y de mayor uso tanto en la teoría de la probabilidad, como en la teoría estadística. Algunos de los autores la llaman distribución gaussiana, en honor a Gauss, a quien se considera el "Padre" de ésta distribución.

Definición 2.2.5 (Distribución Normal)**.** *Se dice que la variable aleatoria X tiene distribución normal de parámetros μ y σ, donde μ es un número real y σ es un número real positivo, si su función de densidad esta dada por*

$$f(x) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]; x \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Se Verifica que, efectivamente, f es una funcion de densidad. Para esto debemos ver que f es no negativa y que

$$\int_{-\infty}^{-\infty} f(x)dx = 1$$

En efecto,

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]} \cdot dx = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp^{\left[\left(-\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right]} \cdot dx$$

Haciendo un cambio, donde $w = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} \sqrt{2}\sigma \cdot dw = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} \cdot dw = 1$$

El parámetro μ es un parámetro de localización y σ es un parámetro de escala.[1]

Definición 2.2.6 (Parámetro de Localización y de Escala)**.** *Sea Y una variable aleatoria. Se dice que θ_1 es un parámetro de localización, si para todo $c \in \mathbb{R}$, se tiene que la variable aleatoria $z := Y + c$ tiene parámetro $\theta_1 + c$. Esto es, si $f_y(\theta_1, \theta_2)$ es la función de densidad de Y entonces la función de densidad de Z es $fz(.;\theta_1 + c, .)$. Se* *dice que* θ_2*es un parámetro escala, si* $\theta_2 > 0$ *y para todo* $c \in \mathbb{R}$*, la variable aleatoria* $W := cY$ *tiene parámetro* $|c|\theta_2$*. Esto es, si* $fY(.;\theta_1,\theta_2)$ *es la función de densidad de* Y*, entonces la función densidad de* W *es* $fw(.;.,|c|\theta_2)$*. [1]*

Nota 2.2.1. *Se escribe* $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ *para indicar que* X *es una variable aleatoria con distribución normal de parámetros* μ *y* σ*.*

En la siguiente gráfica se muestra la función de densidad de una variable aleatoria X *con distribución normal con* $\mu = 0$ *y valores diferentes de* σ*.*

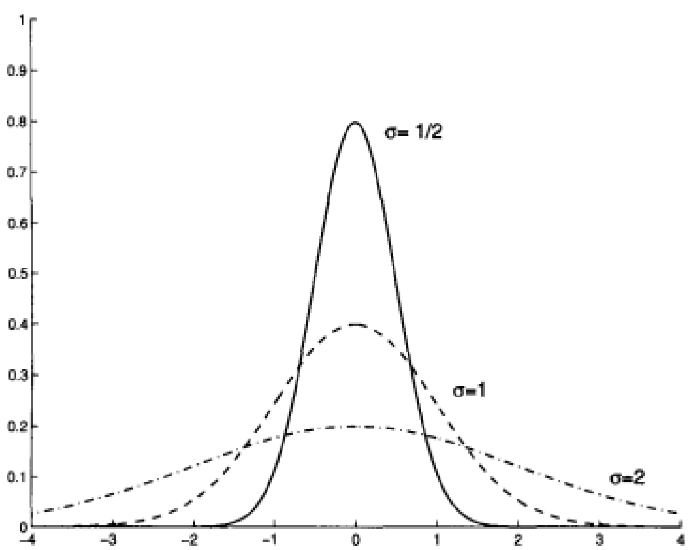


Figura 2.1: cuando $\mu = 0$

la siguiente gráfica muestra la función de densidad de una variable aleatoria $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ *para* $\sigma = 1.41$ *y valores diferentes de* μ*.*

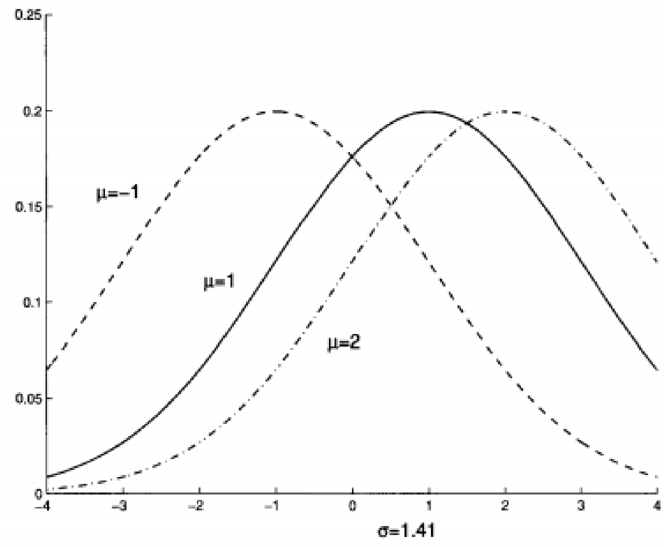


Figura 2.2: $\sigma = 1.14$

La función de distribución de una variable aleatoria $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *está dada por:*

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{u-\mu}{\sigma} \right) \right] du.$$

2.2.2. Distribución Normal Estándar

si $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0,1)$, entonces se dice que X tiene distribución normal estandar. La función de densidad y la función de esta variable aleatoria se denotan por $\phi(*)$ y $\Phi(*)$ respectivamente.[1]

Definición 2.2.7. *La función de densidad de una variable aleatoria normal estándar es simétrica con respecto al eje y. Por lo tanto, para todo* $Z < 0$ *que satisface que: [1, pág 136]*

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z).$$

Definición 2.2.8. *Sea* $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *y sea* $Y := aX + b$ *donde* a *y* b *son constantes reales con* $a \neq 0$.

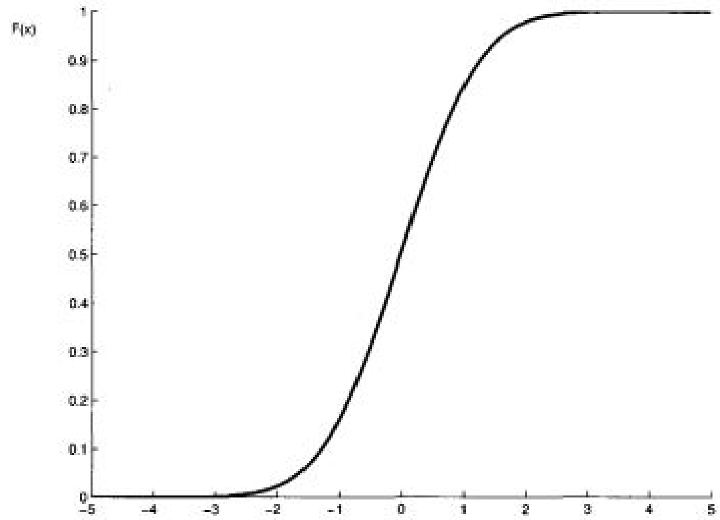


Figura 2.3: Función de distribución normal estándar

Densidad de la variable aleatoria Y está dada por:

$$\begin{aligned} f_y(x) &= \frac{1}{|a|} f_x\left(\frac{x-b}{a}\right) \\ &= \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-(a\mu+\sigma)}{a\sigma}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Esto es, Y tiene distribución normal de parámetro de localización $a\mu + b$ y parámetro de escala $|a|\sigma$. En particular, si $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ entonces $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ tiene distribución normal estándar. Esto es, para conocer los valores de la función de distribución de una variable aleatoria con distribución de una variable aleatoria con distribución normal estándar. [1]

Teorema 2.2.1. *Sea* $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*. Entonces:*

1. $EX = \mu$
2. $Var(x) = \sigma^2$.
3. $m_X(t) = exp\left[\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right]$.

Demostración. Se encuentra [1][Pag.150] □

Nota 2.2.2. *Se puede verificar que la función característica de una variable aleatoria X, con distribución normal de parámetros μ y σ, está dada por:*

$$\Phi_X(t) = exp\left[i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right].$$

Definición 2.2.9. *La distribución normal es otra forma límite de la distribución binomial, siempre y cuando se satisfagan las siguientes condiciones sobre los parámetros n y p de la distribución binomial: $n \to \infty$ y, ni p ni $q = 1 - p$ son muy pequeños. En efecto,[1] Supóngase que $X \overset{d}{=} \mathcal{B}(n,p)$. Entonces:*

$$P(X = x) = \binom{n}{x} P^x (1-p)^{n-x}, x = 0, \ldots, n$$

Cuando $n \to \infty$, se tiene que $x \to \infty$ y además

$$n! \approx \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \textbf{Formula de Stirling}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} p^x (1-p)^{(n-x)}}{\sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} e^{-(n-x)} (n-x)^{(n-x)+\frac{1}{2}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{2}} p^x (1-p)^{n-x} \sqrt{np(1-p)}}{\sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} (n-x)^{(n-x)+\frac{1}{2}} \sqrt{np(1-p)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(np)^{x+\frac{1}{2}} (n(1-p))^{n-x+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} (n-x)^{(n-x)+\frac{1}{2}} \sqrt{np(1-p)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{np(1-p)}} \left(\frac{np}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} \left(\frac{n(1-p)}{n-x}\right)^{(n-x)+\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Sea$\frac{1}{N} := \left(\frac{np}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} \left(\frac{n(1-p)}{n-x}^{(n-x)+\frac{1}{2}}\right)$. Es claro que:

$$lnN = \left(x + \frac{1}{2}\right) ln\left(\frac{x}{np}\right) + \left(n - x + \frac{1}{2}\right) ln\left(\frac{n-x}{n(1-p)}\right) \tag{2.3}$$

Si se toma $Z := \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$, se tiene que Z toma los valores $Z = \frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Al tomar el límite cuando $n \to \infty$, se tiene que Z toma todos los valores de $-\infty$ a ∞. despejando

x en la ecuación anterior se obtiene que

$X = z\sqrt{np(1-p)} + np$.Reemplazando en la 2.2 se llega a:

$$\begin{aligned}
\ln N &= \left(z\sqrt{np(1-p)} + np + \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{z\sqrt{np(1-p} + np}{np}\right) \\
&+ \left(n - (z\sqrt{np(1-p)} + np + \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n - (z\sqrt{np(1-p)} + np)}{n(1-p)}\right) \\
&= \left(np + \sqrt{np(1-p} + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + z\sqrt{\frac{1-p}{np}}\right) \\
&= \left(n(1-p) - z\sqrt{np(1-p)} + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - z\sqrt{\frac{p}{n(1-p)}}\right) \\
&+ \left(n(1-n) - z\sqrt{np(1-p)} + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - z\sqrt{\frac{p}{n(1-p)}}\right)
\end{aligned}$$

Desarrollando en serie la funció $h(x) = \ln(1+x)$ se obtiene.[1, pág 142]

$$\begin{aligned}
\ln N = &\left(z\sqrt{np(1-p)} + np + \frac{1}{2}\right)\left[z\sqrt{\frac{1-p}{np}} - \frac{1}{z}z^2\left(\frac{1-p}{np}\right) + \dots\right] \\
&+ \left(n(1-p) - z\sqrt{np(1-p)} + \frac{1}{2}\right) \\
&\left[-z\sqrt{\frac{p}{n(1-p)}} - \frac{1}{2}z^2\left(\frac{p}{n(1-p)}\right) - \dots\right] \\
&= \left[z^2(1-p) - \frac{1}{2}z^3\sqrt{\frac{(1-p)^3}{np}} + z\sqrt{np(1-p)} - \frac{1}{2}z^2(1-p)\right. \\
&+ \frac{1}{2}z\sqrt{\frac{1-p}{np}} - \frac{1}{4}z^2\left(\frac{1-p}{np} + \dots\right) \\
&- z\sqrt{np(1-p)} - \frac{1}{2}z^2p + z^2p + \frac{1}{2}z^3\sqrt{\frac{p^3}{n(1-p)}} - \frac{1}{2}z\sqrt{\frac{p}{n(1-p)}} \\
&- \frac{1}{4}z^2\left(\frac{p}{n(1-p)}\right)
\end{aligned}$$

esto es,

$$\ln = -\frac{1}{2}z^2 + z^2 + \frac{z}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{1-p}{p}} + \sqrt{\frac{p}{1-p}}\right) + n^{-\frac{1}{2}}$$

por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \log N = \frac{1}{2}z^2$$

y en consecuencia:

$$\lim_{n\to\infty} N = e^{\frac{1}{2}z^2}$$

Puesto que,

$$\begin{aligned}
P(X = x) &= P(x < X \leq x + dx) \\
&= P\left(\frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{x + dx - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
&= P(z < Z \leq z + dz) \\
&\approx g(z)dz
\end{aligned}$$

donde $g(z)$ es la función de densidad de la variable aleatoria Z, entonces,

$$\begin{aligned}
g(z) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{N} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{1}{2}z^2\right)}
\end{aligned}$$

Esto es $X \overset{d}{=} \mathcal{N}(0,1)$. En otras palabras, si n es suficientemente grande $\mathcal{B}(n,p) \approx \mathcal{N}\left[np, np(1-p)\right]$. En la práctica, la aproximación es, por lo general, aceptable cuando $p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $np(1-p) > 9$ ó si $p \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y $n(1-p) > 5$. En el caso $p = \frac{1}{2}$ se obtiene una aproximación bastante buena aún en el caso en que sea "pequeña".

Nota 2.2.3. *El teorema de Moivre-Laplace, enuncia que la distribución normal puede ser usada como una aproximación de la distribución binomial bajo ciertas condiciones, usando la formula de stirling, el cual, hace una aproximación de factoriales suficientemente grandes. Adicionalmente, el teorema nos muestra que función de masa de probabilidad del número aleatorio de "éxitos" en una serie de n ensayos de Bernoulli independientes, cada uno con probabilidad de éxito p (una distribución binomial con n intentos), converge a la función de densidad de probabilidad de la distribución normal con media np y desviación estándar $\sqrt{np(1-p)}$, si n es suficientemente grande y* *asumiendo que p es 1 o 0 de forma particular.*

2.2.3. Distribución Lognormal

Sean X una variable no negativa, y $Y = \ln X$. Si la variable aleatoria Y tiene distribución normal de parámetros μ y σ, entonces, se dice que Y tiene distribución lognormal de parámetros μ y σ.
Es claro que si Y tiene distribución lognormal, su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} exp\left[\left(\frac{\ln x - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right] \mathcal{X}_{(0,\infty)}(x) \tag{2.4}$$

La distribución lognormal es el resultado de causas independientes con efectos positivos que se componen de manera multiplicativa y donde cada una de estas causas tienen un efecto despreciable frente al global. Esto se debe a que la aditividad de los efectos conduce a una ley normal, en el caso de la ley lognormal, lo hace la proporcionalidad de los efectos.

2.3. Opciones Europeas

Las opciones son instrumentos financieros que otorgan al comprador el derecho y al vender la obligación de ralizar la transacción a un precio fijado y en una fecha determinada.Las opciones más simples, la opciones de compra y venta Europeas (European call and put), son un contrato con las condiciones siguientes:

- El contrato prescribe en un tiempo futuro, conocido como la **fecha de expiración** (expiry date).
- Se establece un precio por el activo subyacente, llamado **precio de ejercicio** (exercise price) o **strike**.
- El propietario de la opción, llegada la fecha de expiración, puede ejercerla o

no, conocido el precio del activo. Si tiene una call, puede comparar pagando el precio de ejercicio. Si tiene una put, puede vender recibiendo el precio de ejercicio en vez del precio al que se cotiza el activo.

Este contrato es un derecho, no una obligación, es decir , el propietario puede o no ejercer el dercho que le otorga el contrato. La otra parte del contrato, conocida como el **writer**, tiene la obligación de vender o comprar el activo por el precio de ejercicio si el propietario de la opción decide ejecutarla. El hecho de que el propietario de la opción tenga dercho o no a ejecutarla, tiene un precio que deberá pagar cuando se firma el contrato.
Anteriormente a 1973 todos los contratos de opciones eran llamados de venta libre (over-the-counter), es decir, eran negociados individualmente por un broker en representación de los dos clientes,uno el comprador de la opción y el otro el vendedor. La negociación en un mercado oficial comenzó en 1973 en el Chicago Board Options Exchange (CBOE), comerciando inicialmente solo con opciones de compra con alunos de los stocks más negociados. En nuestros días, las opciones son cambiadas en todos los mercados de cambio del mundo y hay opciones de indices, futuros, bonos del estado,mercancia, monedas, etc. Cuando un contrato de opción es iniciado, deben de estar los dos lados de acuerdo. Uno de los lados del contrato es el comprador, que es la parte que tiene derecho a ejercer la opción. Del otro lado de la opción esta el writer, que debe responder si el comprador ejerciera su derecho. [5]

Ejemplo 2.3.1 (Una opción de compra)**.** *Supongamos que hoy es 12 de mayo de 2019 y que el 12 de noviembre de 2019 el propietario de una opción puede adquirir un producto X por el valor de 250 € por cada participación del producto. Imaginemos las dos posibles situaciones que podrían ocurrir en la fecha de expiración:*

- *Si el precio de la participación del producto X es de 270 € el 12 de noviembre de 2019, entonces el propietario de la opción podría adquirir el activo por solo 250 €. Esta acción, que es llamada el* ***ejercicio*** *de la opción, produciría inmediatamente un beneficio de 20 €, es decir, podemos comprar la participación* *por 250 €y venderla inmediatamente en el mercado por 270 €.*

- *Por otro lado,si el precio de la participación del producto X es de 230 € el 12 de noviembre de 2019, entonces no sería razonable ejrcer la opción ya que la podríamos comprar en el mercado por 230 € en vez de pagar los 250€ ejerciendo la opción.*

Si la participación del producto X sólo toma los valores 230 € o 250€ en la fecha de expiración con igual probabilidad, entonces el beneficio esperado es

$$\frac{1}{2} * 0 + \frac{1}{2} * 20 = 10e$$

2.3.1. Valores de Opciones Pagos y Estrategias

Se presenta algunas notaciones simple:
V= el valor de la opción; cuando la distinción es importante usamos $C(S,t)$ para denotar una opción de compra y $P(S,t)$ para denotar una opción de venta. Este valor es una función del valor actual del activo subyacente S y t el tiempo, es decir, $V = (S,t)$. El valor de la opción también depende de los siguientes parámetros:

- $\sigma =$ la volatilidad del activo subyacente
- $E =$ el precio de ejercicio h
- $T =$ el tiempo de expiración
- $r =$la tasa de interés.

Consideremos lo que sucede justo en el] momento en la fecha vencimiento. Opción, es decir, en el tiempo $t = T$. Un simple argumento de arbitraje nos dice su valor en este momento especial.
Si $S > E$ al vencimiento, tiene sentido financiero ejercer la opción de compra, entregando un importe de E, para obtener un activo por valor de S. El beneficio de tal transacción es el $S - E$. Por otra parte, si $S < E$ al expirar, no deberíamos ejercer la opción de compra porque perderíamos $E - S$.

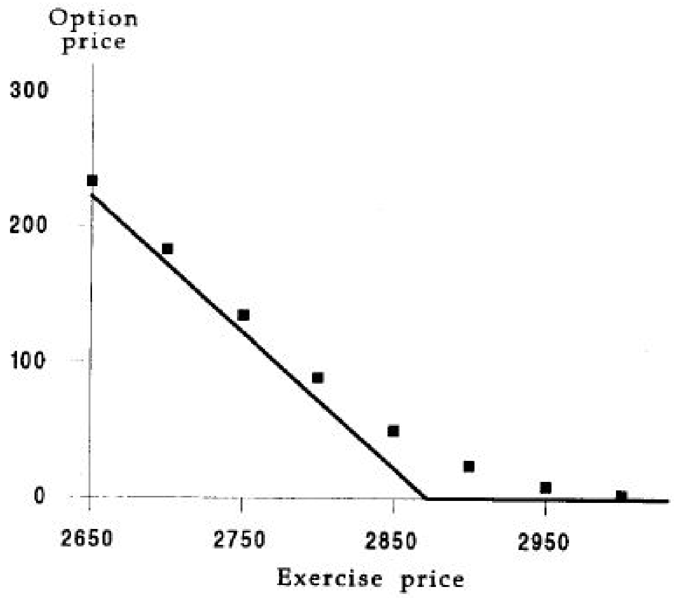


Figura 2.4: El valor de una opción de compra en el momento de la expiración y antes de ella contra los valores de la opción del precio de ejercicio a partir de los datos de la opción de FR-SE índices

En este caso, la opción expira sin valor. Por lo tanto, el valor de la opción de compra al vencimiento puede escribirse como

$$C(S,T) = max(S - E, 0) \tag{2.5}$$

A medida que nos acercamos a la fecha de caducidad podemos esperar que el valor de nuestra opción de compra se aproxime (3.10). Para confirmarlo reproducimos en la figura 2.4 donde se encuentra los datos reales de la opción de compra del índice FT-SE con el valor de la opción al vencimiento para el fijo S.

2.3.2. Límites y Condiciones Finales de las Opciones Europeas.

Una vez deducida la ecuación de Black-Scholes para el valor de una opción, debemos considerar a continuación las condiciones finales y de límite, ya que de lo contrario la ecuación diferencial parcial no tiene una solución única. Por el momento restringimos

nuestra atención a la compra europea, con valor ahora denotado por $C(S,t)$, con precio de ejercicio E y fecha de vencimiento T.
La condición final, que se aplicará en $t = T$, proviene del argumento de arbitraje descrito en la sección (4.3). En $t = t$, el valor de una compra se sabe con certeza que es el pago:

$$C(S,T) = max(S - E, 0). \tag{2.6}$$

Esta es la condición final para nuestra ecuación diferencial parcial. Nuestras condiciones de límite espacial o de precio de los activos se aplican a precio cero de los activos, $S = 0$, y como $S \to \infty$.

2.4. Tasa de interés y actualizaciónes

La tasa de interés es un monto de dinero expresado en forma de porcentaje, mediante el cual se paga por el uso del dinero por parte de quien lo haya recibido. Si se trata de un deposito, la tasa de interés expresa el pago que recibe la persona o empresa que deposita el dinero por poner esa cantidad a disposición del otro. Si se trata de un crédito, la tasa de interés es el monto que el deudor deberá pagar a quien le presta, por el uso de ese dinero.[5]

Para valorar opciones, el concepto más importante que concierne a la tasa de interés es el de valor presente o actualización.

La cuestión es la siguiente: ¿Cuánto debería pagar ahora para recibir una cantidad garantizada E en un tiempo futuro T?. La respuesta a esta pregunta se encuentra descontando el futuro valor E, usando la tasa de interés. Con una tasa de interés constante r, el dinero bancaria $M(t)$ crece exponencialmente de acuerdo a

$$\frac{dM}{M} = rdt.$$

La solución a esta ecuación es

$$M = ce^{rt},$$

donde c es la constante de integración. Como sabemos que $M = E$ en $t = T$, entonces el valor en tiempo t de un cierto payoff es

$$M = Ee^{-r(T-t)}.$$

Si la tasa de interés es una función conocida de tiempo $r(t)$, entonces la solución de

$$\frac{dM}{M} = rdt$$

es

$$M = Ee^{-\int_t^T r(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Puesto que $s < t$ y además s es una variable aleatoria Gaussiana.

2.5. Letras griegas

El valor de una opción depende de diferentes factores, entre los que se incluyen el activo subyacente y su volatilidad, el plazo de vencimiento y los tipos de interés. Las **griegas** son un conjunto de medidas que describen la sensibilidad de su precio y de hecho, son útiles para la gestión del riesgo de la posición. Analizaremos algunos de los métodos alternativos para resolver este problema, Abordando lo que se conoce comúnmente como las "letras griegas" o simplemente las "griegas". Cada letra griega mide un aspecto diferente del riesgo en una posición en opciones y el objetivo de un negociante es manejar las letras griegas de tal manera que todos los riesgos sean aceptables.

2.5.1. Delta

Delta mide la sensibilidad a los cambios en el precio del subyacente. La Δ de un instrumento es la derivada de la función V del valor con respecto al precio S_t del activo

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S_t}$$

$\Delta > 0$ para las opciones de compra: a más precio del subyacente mayor valor de la prima y a menor precio del subyacente, menor valor de la prima.
$\Delta < 0$ para las opciones de venta que están relacionadas inversamente con el precio del activo subyacente, si sube el precio del mismo, baja el precio de la opción. [5, pág 31]

2.5.2. Gamma

La Gamma, Γ, de una cartera de opciones sobre un activo subyacente es la tasa de cambio de la delta de la cartera con respecto al precio del activo subyacente. Gamma mide el ratio de cambio en delta. Γ es la segunda derivada de la función del valor con respecto al precio del subyacente.

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}$$

A gamma se le conoce como el acelerador de delta y como uno de los mejores indicadores del nivel de riesgo. Si la gamma es pequeña, la delta cambia lentamente y los ajustes para mantener un delta neutral deben realizarse sólo en ocasiones. Sin embargo, si la gamma es grande en términos absolutos, la delta es muy sensible al precio del activo subyacente. Entonces es un gran riesgo mantener sin cambios un delta neutral, durante cualquier cantidad de tiempo.
Sin embargo, en el caso de una opción europea de compra o de venta sobre una acción

que no paga dividendos, la gamma se obtiene por medio de:

$$\Gamma = \frac{N^{'}(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$

Donde la función $N^{'}(x)$ es la derivada de la función de probabilidad acumulativa para una variable normal estandarizada. En otras palabras, es la probabilidad de que una variable con una distribución normal estándar, $\phi(0,1)$, sea menor que x y además la gamma de una posición larga en la opción siempre es positiva y varía con S_0.[5]

2.5.3. Theta

Theta es la negativa de la derivada de la función del valor con respecto al tiempo restante hasta la finalización del derivado.

$$\Theta = -\frac{\partial V}{\partial t}$$

Describe el cambio en el valor de la opción a medida que pasa el tiempo y el resto de factores permanece constante.[5]

2.5.4. Rho

La rho es la tasa de cambio del valor del activo subyacente con respecto a la tasa de interés. Es decir, ρ es la derivada de la función de valor con respecto al tipo de interés libre de riesgo.[5]

$$\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$$

En el caso de una opción de compra europea sobre una acción que no paga dividendos,

$$\rho = KTe^{-rT}N(d_2)$$

En el caso de una opción de venta europea,

$$\rho = -KTe^{-rT}N(-d_2)$$

Capítulo 3

Cálculo Estocástico

L. Bachelier en 1900 fue el primero en describir el precio de las acciones financieras mediante el movimiento Browniano; su "Teoría de la especulación es el primer ladrillo de las finanzas modernas. Suponiendo que el precio de las acciones es una expresión lineal del movimiento Browniano con deriva, llegó a asignar precio a algunas opciones cotizadas en Francia en aquella epoca y estableció comparaciones con el mercado real.

3.1. Caminos aleatorios de precio de activos

Con frecuencia se afirma que los precios de los activos deben moverse al azar debido a la hipótesis del mercado activo. Existe varias formas diferentes de hipótesis con diferentes restrinciones, pero todas fundamentalmente dicen dos cosas

- El pasado se complementa en el precio actual y que no cuenta con mas información.
- Los mercados responden de inmediato a cualquier información nueva sobre un activo.

Así, la modelización de los precios de los activos se trata realmente de modelar la llegada de nueva información que afecta al precio. Con los dos supuestos anteriores, los cambios imprevistos en el precio de los activos son un proceso de Markov.

En primer lugar, observamos que el cambio absoluto en el precio del activo no es por sí mismo una cantidad útil: un cambio de $1p$ es mucho más significativo cuando el precio de los activo es de 20p que cuando es de 200p. En su lugar, con cada cambio en el precio de los activo, asociamos una rentabilidad, definida como el cambio en el precio dividido por el valor original. Esta medida relativa del cambio es claramente un mejor indicador de su tamaño que cualquier medida absoluta.

Ahora supongamos que en el tiempo t el precio del activo es S. Consideremos un pequeño intervalo de tiempo posterior dt, durante el cual S cambia a $S+dS$, como se esboza en la figura (3.1) (usamos la notación d para el pequeño cambio en cualquier cantidad a lo largo de este intervalo de tiempo cuando pretendemos considerarlo como un cambio infinitesimal). ¿Cómo podríamos modelar el rendimiento correspondiente del activo, dS/S? El modelo más común descompone este rendimiento en dos partes. Uno es un retorno predecible, determinista y anticipado similar al retorno del dinero invertido en un banco libre de riesgo. Da una contribución

$$\mu dt$$

Al rendimiento dS/S, donde μ es una medida de la tasa promedio de crecimiento del precio del activo, tambien conocido como el derivado. En modelos simples, μ se toma como una constante. En modelos más complicados, por ejemplo, para los tipos de cambio, μ puede ser una función de S y t. La segunda contribución a los modelos dS/S el cambio aleatorio en el precio del activo en respuesta a los efectos externos, tales como las informaciones inesperadas. Está representado por una muestra aleatoria extraída de una distribución normal con un promedio de cero y añade un término

$$\sigma dX$$

a dS/S. Aquí σ es un número llamado la volatilidad, que mide la desviación estándar de los rendimientos. La cantidad dX es la muestra de una distribución normal, que se analiza más adelante. Al juntar estas contribuciones, obtenemos la ecuación diferencial estocástica.

$$\frac{dS}{S} = \sigma dX + \mu dt \tag{3.1}$$

Que es la representación matemática de nuestra simple forma para generar los precios de los activos.

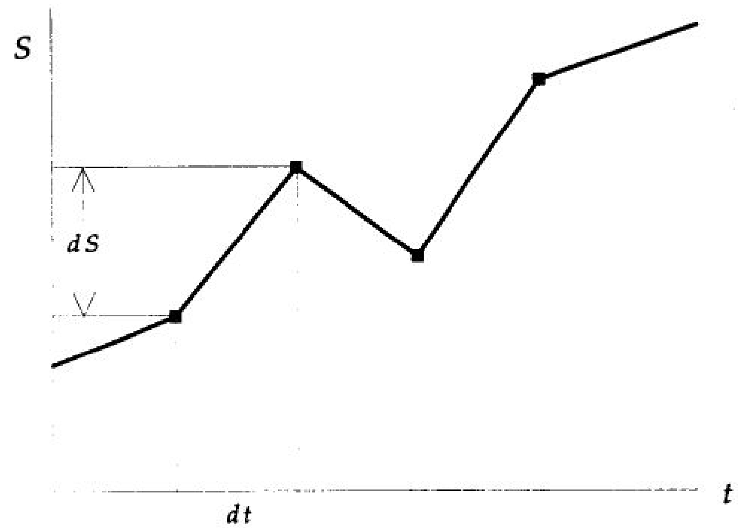


Figura 3.1: Detalle de una caminata aleatoria discreta

[3]

El único símbolo en la ecuación (3.1) cuyo papel aún no está del todo claro es dX. Si fuéramos a tachar el término involuntario dX, tomando $\sigma = 0$, nos quedaríamos con la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dS}{S} = \mu dt$$

o

$$\frac{dS}{dt} = \mu S.$$

Donde μ es constante esto se puede resolver exactamente para dar crecimiento exponencial en el valor del activo.

$$S = S_0 e^{\mu(t-t_0)}$$

Donde S_o es el valor del activo en $t = t_0$. Así si $\sigma = 0$ el precio del activo es totalmente determinista y podemos predecir el precio futuro del activo con certeza.

El término dX, que contiene la aleatoriedad que es sin duda una característica de los precios de los activos, se conoce como un proceso de Wiener. Si tiene las siguientes propiedades:

- dX es una variable aleatoria, extraída de una distribución normal;
- la media de dX es cero;
- la varianza de dX es dt.

una forma de escribir esto es

$$dX = \phi\sqrt{dt}$$

donde ϕ es una variable aleatoria extraída de una distribución normal estandarizada. La distribución normal estandarizada tiene media cero, varianza unitaria y una función de densidad de probabilidad dada por

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\phi^2} \tag{3.2}$$

para $-\infty < \phi < \infty$.Si definimos el operador de expectativa ε por

$$\varepsilon[F(.)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\phi)e^{-\frac{1}{2}\phi^2}, d\phi, \tag{3.3}$$

para cualquier función F, entonces

$$\varepsilon[\phi] = 0$$

y

$$\varepsilon[\phi^2] = 1$$

La razón de que dX se escale con $\sqrt{dt}$ es que cualquier otra opción para la magnitud de dX conduciría a un problema que no tiene sentido o trivial cuando finalmente consideramos lo que sucede en el límite $dt \to 0$, en el que estamos particularmente interesados por las razones mencionadas anteriormente. (también mencionamos que si dX no se escalan de esta manera, la varianza de los caminos aleatorios para S tendría un valor límite de 0 o ∞). Volveremos a este punto más tarde.

Hemos dado alguna justificaciones económicamente razonables,ya que se ajusta muy bien a la fecha de las series temporales reales, al menos para las acciones y los índices. (El contrato con las monedas es menos generoso, especialmente a largo plazo). Existen algunas discrepancias; por ejemplo, los datos reales parecen tener una mayor probabilidad de grandes subidas o bajadas que la que predice el modelo.

Pero, en general, ha resistido el paso del tiempo que predomina bien y puede ser el punto de partida para modelos más sofisticados. Como ejemplo de dicha generalización, los coeficientes de dX y dt en (3.1) podrían ser cualquier función de S y/o t. La elección particular de funciones es una cuestión para el modelador matemático y estadístico, y diferentes activos pueden ser mejor representados por otras ecuaciones diferenciales estocásticas. La ecuación (3.1) es un ejemplo particular de un camino aleatorio. No se puede dar una determinación para el precio de la acción, pero puede dar información interesante e importante sobre el comportamiento de S en sentido probabilístico. Supongamos que la fecha de hoy es t_0 y el precio de los activos de hoy es S_0. Si el precio en una fecha posterior t', dentro de seis meses, digamos que es S', entonces S' se distribuirá alrededor de S_0 con una función de densidad de probabilidad de la forma que se muestra en la figura (3.2).

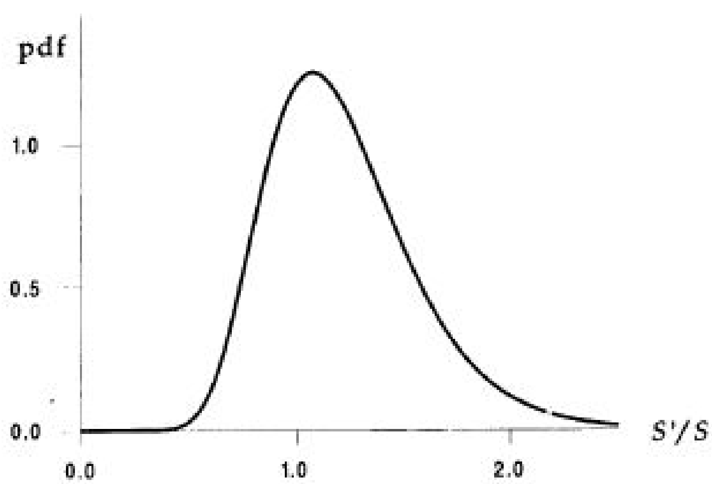


Figura 3.2: Detalle de un camino aleatorio discreta

[3]

El futuro precio de los activos S', por lo tanto, es más probable que esté cerca de S_0 y es menos probable que esté muy lejos. Cuanto más lejos esté el t' de t_0, más extendida estará esta distribución. Si S sigue el camino aleatorio dado por (3.1) entonces la función de densidad de probabilidad representada por esta curva sesgada en forma de campana es la distribución lognormal (esta en el capitulo anterior) y el camino aleatorio (3.1) es por lo tanto conocido como un camino aleatorio lognormal. Es decir, los rendimientos sigue un comportamiento normal mientras que el comportamiendto de los precios sigue una distribución lognormal. Podemos pensar en (3.1) como una receta para generar una serie de tiempo - cada vez que la serie se reinicia genera una trayectoria de diferente resultado. Cada camino se llama una realización de camino aleatoria. Esta receta funciona de la siguiente manera. Supongamos, como ejemplo, que el precio de hoy es de \$1, y tenemos $\mu = 1$, $\sigma = 0.2$ con $dt = 1/250$ (un día como proporción de 250 días hábiles por año). Ahora tracemos un número al azar de una distribución normal con media 0 y varianza $1/250$; esto es dX.Supongamos que se construye el número $dX = 0.08352\ldots$. Ahora haz el cálculo en (3.1) para encontrar el dS:[3]

$$dS = 0.2 \times \$1.0 \times 0.08352 \cdots + 1.0 \times \$1.0 \times \frac{1}{250} = \$0.020704 \cdots$$

Añade este valor para dS después de un paso de tiempo:$S + dS = \$1.020704 \cdots$. Repita los pasos anteriores, usando el nuevo valor de S y construyamos un nuevo número aleatorio. Al repetirse este procedimiento, se genera una serie temporal de números aleatorios que parece similar a las series auténticas del mercado de valores. En primer lugar, consideremos ahora brevemente algunas de las propiedades de (3.1). La ecuación (3.1) no se refiere a la historia pasada del precio del activo; el siguiente precio del activo $(S + dS)$ depende únicamente del precio actual. Esta independencia del pasado se llama la propiedad Morkov [3]. En segundo lugar, consideramos que la media de dS

$$\varepsilon[dS] = \varepsilon[\sigma S dX + \mu S dt] = \mu S dt,$$

desde $\varepsilon[dX]$. En promedio, el siguiente valor para S es mayor que el anterior por una cantidad de $\mu S dt$.

En tercer lugar, la diferencia de dS es

$$Var[dS] = \varepsilon[dS^2] - \varepsilon[dS]^2 = \varepsilon[\sigma^2 S^2 dX] = \sigma^2 S^2 dt.$$

La raíz cuadrada de la varianza es la desviación estándar, que es por lo tanto proporcional a σ.

Si comparamos dos caminos aleatorias con diferentes valores para los parámetros μ y σ, vemos que la que tiene el valor mayor de μ generalmente se eleva más abruptamente y la que tiene el valor mayor de σ aparece más irregular. Por lo general, para las acciones e índices el valor de σ está en el rango de 0,05 a 0,4 (las unidades de σ^2 son por año). Los bonos del Estado son ejemplos de activos de baja volatilidad, mientras que las "penny sharesz las acciones de empresas de alta tecnología suelen tener una alta volatilidad".

La volatilidad se cita a menudo como un porcentaje, de modo que $\sigma = 0,2$ se llamaría una volatilidad del 20 %.

3.2. Movimiento Browniano

En 1828 el botánico inglés Robert Brow, observo un fenómeno en los granos de polen, el cual se movían irregularmente denominado un Movimiento Browniano. Un proceso aleatorio que describe el comportamiento de ciertas variables aleatorias a medida que se desplazan en el tiempo. Este proceso se utiliza frecuentemente en los modelos financieros para describir la evolución de los precios a lo largo del tiempo.

Definición 3.2.1. *Un proceso estocástico $B = (B_t, t \in [0, \infty))$ es llamado movimiento browniano o proceso de wiener si satisface las siguientes condiciones:*

- $B_t = 0$
- *El proceso $(B_t)_{t\geq 0}$ tiene incrementos estacionarios, es decir, $B_t - B_s \stackrel{d}{=} B_{t+h} - B_{s+h}$ para todo $s, t \in T$ y para todo $s+h, t+h \in T$.*

- *El proceso* $(B_t)_{t\geq 0}$ *tiene incrementos independientes, es decir, cada elección de* $t_i \in T$ *con* $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ *y* $n > 1, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$*, son variables aleatorias independientes.*
- *Para* $0 \leq s \leq t \leq \infty$*, el incremento* $B_t - B_s$ *sigue una distribución normal con media cero y varianza* $t - s$*.*
- $(B_t)_{t\geq 0}$ *tiene trayectorias continuas y es en ningún punto diferenciable.*

Algunas propiedades relevantes del Movimiento Browniano:

1. El Movimiento Browniano es un proceso Gaussiano.
2. La covarianza del Movimiento Browniano es $Cov(B_s, B_t) = min\{s, t\}$.
3. El Movimiento Browniano es $(0,5)$ autosimilar, es decir

$$\left(T^{\frac{1}{2}}B_{t_1}, \ldots, T^{\frac{1}{2}}B_{t_n}\right) \stackrel{d}{=} \left(B_{T_{t_1}}, \ldots, B_{T_{t_n}}\right)$$

para cada $T > 0$, alguna elección de $t_i \geq 0, i = 1, \ldots, n$ y $n \geq 1$. Por lo tanto, sus caminos no son diferenciables. Cuando se habla de autosimilaridad, se quiere decir que los patrones a escala de una trayectoria browniana en algún intervalo de tiempo grande o pequeño, conserva una forma similar, pero no son idénticos.

Nota 3.2.1. *La autosimilaridad es una distribucional, no una propiedad de camino.*

Nota 3.2.2. *Los caminos brownianos aleatorios no tienen variación limitada en ningún intervalo finito* $[0, T]$*. Es decir,*

$$\underset{\tau}{Sup}\sum_{i=1}^{n}|B_{t_i}(w) - B_{t_{i-1}}| = \infty$$

Donde el supremo toma todos las posibles particiones $\tau : 0 = t_0 < \ldots < t_n = T$ *de* $[0, T]$*. Esta propiedad es particularmente importante en el presente trabajo pues tiene como consecuencia el hecho de que no se pueden usar las trayectorias Brownianas como integradores en el sentido de Riemann-Stieltjes. Por otro lado puede demostrarse* *que la variación cuadrática sobre $[a, b]$ es:*

$$\underset{\tau}{Sup} \sum_{i=1}^{n} |B_{t_i}(w) - B_{t_{i-1}}|^2 = b - a$$

OBSERVACIÓN

1. El movimiento browniano es un proceso gaussiano. En efecto, la ley un vector aleatorio $(B_{t_1}; \ldots; B_{t_n})$ es normal ya que este vector es una transformacion lineal del vector $(B_{t_1}; B_{t_2} - B_{t_1}; \ldots; B_{t_n} - B_{t_n - 1})$ que tiene ley normal ya que tiene las componentes independientes y normales.

2. La media y la autocovarianza del movimiento browniano se calculan facilmente:

$$\begin{aligned} E(B_t) &= 0 \\ E(B_s B_t) &= E(B_s(B_t - B_s + Bs)) \\ &= E(Bs(Bt - Bs)) + E(B_s^2) = s = min(s; t) \end{aligned}$$

   Si $s \geq t$ Puede comprobarse fácilmente que si un proceso gaussiano tiene media cero y función de autocovarianza; $\Gamma_X(s; t) = min(s; t)$, entonces cumple las condiciones $i), ii)$ y $iii)$ de la definición anterior.

3. Puede demostrarse que existe un proceso estocastico que cumple las condiciones anteriores. Para ello, se parte de sus distribuciones en dimensión finita, que son leyes normales $N(0; \Gamma)$ donde Γ es la matriz

$$\begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_2 & t_2 & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{pmatrix}$$

   El teorema de extensión de Kolmogorov permite construir un proceso estocástico fijadas las distribuciones en dimensión finita, siempre que sean compatibles, lo que aqui es cierto. Finalmente hay que demostrar que se pueden modificar las variables B_t conjuntos de probabilidad cero de forma que las trayectorias sean continuas. Para ello se aplica el criterio de continuidad de Kolmogorov. Como los incrementos $B_t - B_s$ tienen ley normal $N(0; t-s)$, para todo número entero k tendremos

$$E\left[(B_t - B_s)^{2k}\right] = \frac{(2k)!}{2^k k!}(t-s)^k \tag{3.4}$$

3.2.1. Regularidad de las Trayectorias

Apartir del proceso de Poisson, aplicaremos su desigualdad en el movimiento browniano. Eligiendo $p = 2k$ y utilizando (3.4), tendremos $\alpha = k$. Por lo tanto, para todo $\epsilon > 0$ existe una variable aleatoria $G_{\epsilon;T}$ tal que

$$|B_t - B_s| \leq G_{\epsilon,T}|t-s|^{\frac{1}{2}-\epsilon} \qquad \forall s,t \in [0;T] \tag{3.5}$$

Es decir, las trayectorias del movimiento Browniano son continuas de orden $\frac{1}{2}-\epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Intuitivamente, esto significa que

$$\Delta B_t = B_{t+\Delta t} - B_t \simeq (\Delta t)^{\frac{1}{2}}$$

: En media esta aproximación es exacta: $E[(\Delta B_t)^2] = \Delta t$.

Procesos relacionados con el Movimiento Browniano

1. **El puente browniano:** Consideremos el proceso

$$X_t = B_t - tB_1; \qquad t \in [0;1]$$

Se trata de un proceso normal centrado con función de autocovarianza

$$E(X_t X_s) = min(s;t) - S_t$$

que verifica $X_0 = 0, X_1 = 0$:

2. **El movimiento browniano con deriva:** Consideremos el proceso

$$X_t = \sigma B_t + \mu t;$$

$t \geq 0$, donde $\sigma > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$ son constantes. Se trata de un proceso normal con media y función de autocovarianza

$$E(X_t) = \mu t;$$

$$\Gamma_X(s;t) = \sigma^2 min(s;t)$$

3. **Movimiento browniano geométrico:** Es el proceso estocástico propuesto por Black, Scholes y Merton como modelo para la curva de precios de los activos financieros. Su definición es la siguiente

$$X_t = e^{\sigma B_t + \mu t};$$

$t \geq 0$, donde $\sigma > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$ son constantes. Es decir, se trata de la exponencial de un movimiento browniano con deriva lineal.

3.2.2. Simulación en Matlab

1. En la figura (3.3) realiza una simulación de movimiento browniano discretizado sobre $[0, 1]$ con $N = 500$. Aquí, se utiliza el generador de números aleatorios RANDN, el cual, cada llamada a RANDN produce un número "pseudoaleatorio"(valor de una variable aleatoria, que tiene una distribución de probabilidad uniforme) independiente de la distribución $N(0, 1)$. Para hacer que los experimentos sean repetibles, Matlab permite establecer el estado inicial del generador de números aleatorios.

```
randn('state',100)
T=1;N=500;dt=T/N;
dw=zeros(1,N);
w=zeros(1,N);

dw(1)=sqrt(dt)*randn;
w(1)=dw(1);
for j=2:N
    dw(j)=sqrt(dt)*randn;
    w(j)=w(j-1)+dw(j);
end
plot([0:dt:T],[0,w],'r-')
xlabel('t','FontSize',16)
ylabel('w(t)','FontSize',16,'Rotation',0)
```

Figura 3.3: Código en Matlab de Caminos Aleatorios (MB)

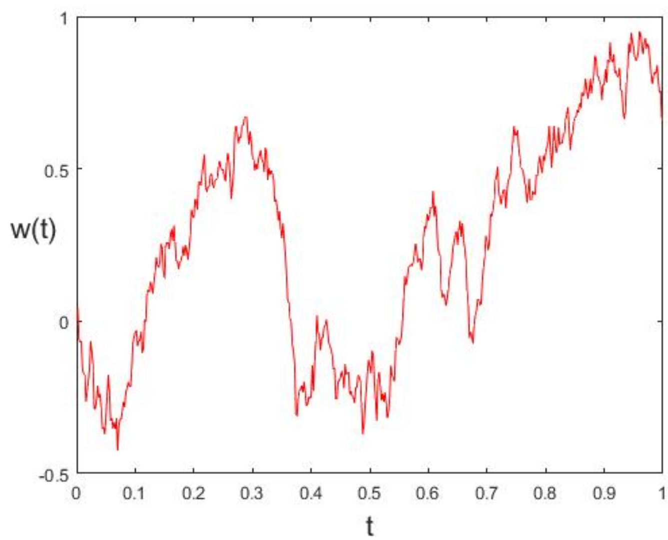


Figura 3.4: Camino Browniano Discretizado

2. Luego, vemos en la figura (3.6) que aunque $u(W(t))$ no es uniforme a lo largo de trayectorias individuales, el promedio de la muestra es suave. Esto se puede establecer rigurosamente, en donde el valor esperado de $u(W(t))$ resulta ser $e^{\frac{9t}{8}}$. En 3.5 se registra la máxima discrepancia entre el promedio de la muestra y el valor esperado exacto en todos los puntos t_j. Encontramos ese promedio de 0.0504. En efecto, aumentar el número de muestras a 4000 reduce el promedio

a 0.0268.

```
randn('state',100)
T=1;N=500;dt=T/N;t=[dt:dt:1];
M=1000;
dW=sqrt(dt)*randn(M,N);
W=cumsum(dW,2);
U=exp(repmat(t,[M 1])+0.5*W);
Umean=mean(U);
plot([0,t],[1,Umean],'b-'),hold on
plot([0,t],[ones(5,1),U(1:5,:)],'r--'),hold off
xlabel('t','FontSize',16)
ylabel('U(t)','FontSize',16,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')
legend('mean of 1000 paths','5 individual paths',2)
averr=norm((Umean-exp(9*t/8)),'inf')
```

Figura 3.5: Código Matlab

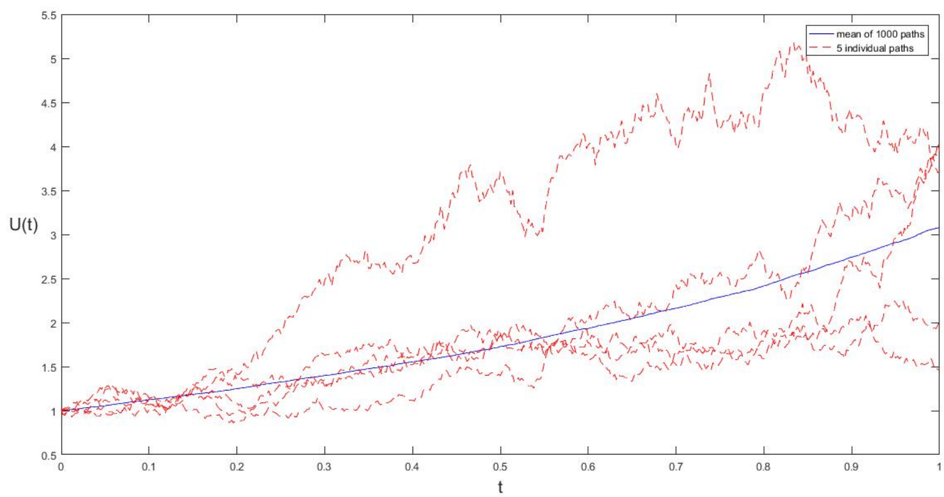


Figura 3.6: Más 1000 caminos brownianos discretizados y a lo largo de 5 caminos individuales

3.3. Integrales Estocásticas

Sabemos que los caminos aleatorios de movimientos brownianos son en ningún punto diferenciable y tienen variación limitada. la integral no puede ser definida en la forma habitual. Sin embargo, se puede definir la integral para procesos estocásticos usando la naturaleza estocástica del Movimiento Browniano. Esta integral fue definida por Kiyoshi Itô en 1949, y se conoce como Integral Estocástica de Itô. La intención es definir la integral de Itô de un proceso estocástico $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ respecto del movimiento Browniano, es decir, una integral de la forma

$$\int_0^T B_t dB_t$$

Dado que la integración por caminos con respecto a la ruta de muestra browniana, como lo sugiere la integral de Riemann-Stieltjes, no conduce a una clase suficientemente grande de funciones integrables f, intentaremos definir la integral como un promedio probabilístico.

Ejemplo 3.3.1. *Teniendo en cuenta la integral definida anteriormente,*

$$B = (B_t, t \geq 0)$$

denota el movimiento browniano. Con el fin de entender lo que sucede, consideramos la sumatoria de Riemann-Stieltjes

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} B_{t_{i-1}} \Delta_i B$$

donde $\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = t$*, es una partición de* $[0, t]$ *y para alguna función* f *definida en* $[0, t]$*,*

$$\Delta f : \Delta_i f = f(t_i) - f(t_{i-1}), i = 1, \ldots, n,$$

Son el incremento correspondiente de f *y*

$$\Delta_i = t_i - t_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

3.3.1. Lema de Itô

En la vida real los precios de los activos se cotizan a intervalos de tiempo discretos. Por lo tanto, hay un límite inferior práctico para el paso de tiempo básico dt de nuestro camino aleatorio (3.1). Si utilizamos este paso de tiempo en la práctica para valorar las opciones, descubriríamos que teníamos que lidiar con grandes cantidades de datos de forma incontrolable. En su lugar, configuramos nuestros modelos matemáticos en el límite de tiempo continuo $dt \to 0$; es mucho más eficiente para resolver las ecuaciones diferenciales resultantes que valorar las opciones mediante la simulación directa de los caminos aleatorios en una escala de tiempo práctica. Para hacer esto, necesitamos alguna maquinaria técnica que nos permita manejar el término aleatorio dX como $dt \to 0$.

El lema de itô es el resultado más importante sobre la manipulación de variables aleatorias que requerimos. Es a las funciones de las variables aleatorias lo que el teorema de Taylor es a las funciones de las variables deterministas, en que se relaciona el pequeño cambio en una función de una variable aleatoria con el pequeño cambio en la variable aleatoria en sí mismo. Nuestro enfoque heurístico del lema de Itô se basa en la expansión de la serie Taylor. Antes de llegar al lema de Itô, necesitamos un resultado, que no probamos rigurosamente.[3]

$$dX^2 \to dt \quad cuando \quad dt \to 0 \tag{3.6}$$

Por lo tanto, cuanto más pequeño sea el dt, más seguro es que dX^2 sea igual a dt. Supongamos que $f(s)$ es una función suave de S y olvidemos por el momento que S es estocástica. Si variamos S por una pequeña cantidad dS entonces claramente f también varía por una pequeña cantidad siempre que no estamos cerca de singularidades de f. De la expansión de la serie de Taylor podemos escribir

$$df = \frac{df}{dS} + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dS^2} + \cdots\,, \tag{3.7}$$

donde los puntos denotan un resto que es más pequeño que cualquiera de los términos que hemos retenido. Ahora recordemos que dS está dado por 3.1. Aquí dS es simplemente un número, aunque aleatorio y al cuadrado encontramos que

$$\begin{aligned} dS^2 &= (\sigma S dX + \mu S dt)^2 \\ &= \sigma^2 S^2 dX^2 + 2\sigma\mu S^2 dt dX + \mu^2 S^2 dt^2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ahora examinamos el orden de magnitud de cada uno de los términos en (3.8). (Véase el punto técnico 2 más abajo para el símbolo $o(\cdot)$. Desde que

$$dX = o(\sqrt{dt}),$$

el primer término es el más grande para el pequeño dt y domina los otros dos términos. Por lo tanto, para el orden,

$$dS^2 = \sigma^2 S^2 dX^2 + \cdots .$$

Desde $dX^2 \to dt$, al orden principal

$$dS^2 \to \sigma^2 S^2 dt.$$

Substituimos esto en (3.7) y retenemos sólo aquellos términos que son por lo menos tan grandes como *o(dt)*. Usando también la definición de dS de (3.1),

$$\begin{aligned} df &= \frac{df}{dS}(\sigma S dX + \mu S dt) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2} dt \\ &= \sigma S \frac{df}{dS} dX + \left(\mu S \frac{df}{dS} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2} \right) dt \end{aligned} \tag{3.9}$$

Este es el lema de Itô que relaciona el pequeño cambio en una función de una variable aleatoria con el pequeño cambio en la propia variable.[3]

Debido a que el orden de magnitud de dX es *0*$(\sqrt{dt})$, la segunda derivada de f con respecto a S aparece en la expresión para df en el orden dt. Los términos de orden dt juegan un papel importante en nuestros análisis posteriores, y cualquier otra elección para el orden de dX no conduciría a los interesantes resultados que descubrimos. Se puede demostrar que cualquier otro orden de magnitud para dX conduce a propiedades poco realistas para el camino aleatorio en el límite $dt \to 0$ si $dX \gg \sqrt{dt}$ la variable aleatoria va inmediatamente a cero o al infinito, y $dX\sqrt{dt} \ll$ el componente aleatorio del paseo se desvanece en el límite $dt \to 0$.

Obsérvese que (3.9) está compuesto por un componente aleatorio proporcional a dX y un componente determinístico proporcional a dt. A este respecto, tiene un parecido con la ecuación (3.1). La ecuación (3.9) es también una receta, esta vez para determinar el comportamiento de f, y f en sí sigue un recorrido aleatorio.

El resultado (3.9) puede generalizarse aún más considerando una función de la variable aleatoria S y del tiempo t,$f(S,t)$. Esto implica el uso de derivadas parciales ya que ahora hay dos variables independientes,S y t. Podemos expandir el $f(S+dS,t+dt)$ en una serie de Taylor sobre el (S,t) para conseguir

$$df = \frac{\partial f}{\partial S}dS + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}dS^2 + \cdots$$

Usando nuestras expresiones (3.1) para dS y (3.6) para dS^2 encontramos que la nueva expresión para df es

$$df = \sigma S\frac{\partial f}{\partial S}dX + \left(\mu S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)dt \tag{3.10}$$

Como un simple ejemplo de la teoría anterior, consideremos la función $f(S) = logS$. La diferenciación de esta función da

$$\frac{df}{dS} = \frac{1}{S} \quad \text{y} \quad \frac{d^2 f}{dS^2} = -\frac{1}{S^2}$$

Así, usando (3.9), llegamos a

$$df = \sigma dX + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt$$

Es una ecuación diferencial estocástica de coeficiente constante, que dice que el salto *df* se distribuye normalmente. Ahora consideremos f en sí mismo: es la suma de los saltos *df* (en el límite, la suma se convierte en una integral). Como la suma de las variables normales también es normal, $f - f_0$ tiene una distribución normal con una media de $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t$ y una varianza de $\sigma^2 t$.

Aquí, por supuesto,$f_0 = logS_0$ es el valor inicial de f. La función de densidad de probabilidad de $f(s)$ es, por lo tanto.

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}e^{-(f-f_0-(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t)^2/2\sigma^2 t} \tag{3.11}$$

para $-\infty < f < \infty$.

Ahora que tenemos la función de densidad de probabilidad de $f(S) = logS$ no es difícil mostrar que la función de densidad de probabilidad de S en sí misma es

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}e^{-(log(S/S_0)-(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t)^2/2\sigma^2 t} \tag{3.12}$$

para $0 < S < \infty$;(3.12) se conoce como la distribución **lognormal**, y los camino aleatorio que da lugar a menudo se llama **camino aleatorio lognormal**.

3.3.2. La integral de Itô para procesos simples

Dada la integral estocástica de Itô, se analiza para una clase de procesos cuyos caminos asumen solo un número finito de valores. Como siempre $B = (B_t, t \geq 0)$ denota el movimiento browniano, y

$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t), \quad t \geq 0),$$

Es la filtración natural correspondiente. Recordemos que un proceso estocástico $X = (X_t, t \geq 0)$ es adaptado a movimiento browniano si X_t es adaptado a $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$. Esto significa que, para todo t, X_t es una función del pasado y presente de movimiento browniano.

Definición 3.3.1. *El proceso estocástico* $C = (C_t, t \in [0, T]$ *es llamado simple si satisface las siguientes propiedades:*
Existe una partición

$$\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T$$

y una sucesión $(Z_i, i = 1, \ldots, n)$ *de variables aleatorias tal que*

$$C_t = \begin{cases} Z_n, & si \quad t = T \\ Z_i, \quad si & t_{i-1} \leq t \leq t_i, \quad i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

La sucesión (Z_i) *es adaptado a* $(\mathcal{F}_{t_{i-1}}, i = 1, \ldots, n)$*, i.e.* Z_i *es una función de movimiento browniano hasta el momento* t_{i-1}*, y satisface* $EZ_i^2 < \infty$ *para todo i [4].*

Definición 3.3.2. *La Integral estocástica de Itô de un proceso simple* C *en* $[0, T]$ *esta dada por*

$$\int_0^T C_s dB_s = \sum_{i=1}^{n} C_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \sum_{i=1}^{n} Z_i \Delta_i B$$

[4]

Nota 3.3.1. *Cuando* $t = T$*, La Integral estocástica de Itô de un proceso simple* C *en* $[0, t]$*,* $t_{k-1} \leq t \leq t_k$*, esta dada por*

$$\int_0^t C_s dB_s = \int_0^T C_s I_{[0,t]}(s) dB_s = \sum_{i=1}^{k-1} Z_i \Delta_i B + Z_k(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})$$

donde $\sum_{i=1}^{0} Z_i \Delta_i B = 0$*.[4]*

Observación 3.3.1. *Esta definición es independiente de la representación de g como proceso simple ya que es dada trayectoria por trayectoria. Una propiedad importante de la integral estocástica es la llamada relación de isometría. De ésta, en particular, se obtienen versiones del teorema de convergencia dominada para dicha integral.*

Capítulo 4

Modelo de Black-Scholes

A principios de la década de 1970, Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton lograron un adelanto importante en la valuación de las opciones sobre acciones, el cual consistió en el desarrollo de lo que se conoce como modelo Black-Scholes o modelo Black-Scholes-Merton. Este modelo ha influido enormemente en la manera en que los negociantes valúan y cubren las opciones; también ha sido fundamental para el crecimiento y éxito de la ingeniería financiera en los últimos 30 años.

En este capítulo presentamos el modelo Black-Scholes para la valuación de opciones de compra y de venta europeas sobre una acción que no paga dividendos, y supuestos en que se basa. Además su analisis se daró basándose en que el precio de esta dependerá del precio de la acción ya que los dos precios tienen la misma fuente de incertidumbre, mismo que permite construir una cartera de arbitraje formada por la opción y la acción o activo subyacente para eliminar la incertidumbre a través de una combinación de posiciones de estos activos, misma cartera es libre de riesgo y por esta razón debe generar rentabilidad de un activo libre de riesgo. El tipo más frecuente de ecuación diferencial parcial en los problemas financieros es la ecuación parabólica. Una ecuación parabólica para una función $V(S,t)$ es una relación específica entre V y sus derivadas parciales con respecto a las variables independientes S y t.

4.1. Fórmula de Black scholes

El principio básico para obtener la fórmula es construir una estrategia autofinanciada de cobertura contra el riesgo inherente a la opción en la fecha de ejercicio. El mecanismo de cobertura dinámica es el concepto más importante para comprender el método de Black-Scholes.

4.1.1. Fórmula de Black-Scholes para Opciones Call y Put de tipo Europeo

La fórmula de Black-Scholes es una expresión que proporciona el valor teórico de una opción Call o Put europea a partir de datos como: Esta fórmula calcula el valor teórico de una opción put o call europea, utilizando los siguientes parámetros:

- t es el tiempo transcurrido, $t \in [0, T]$; donde T es la fecha de vencimiento.
- S es el precio actual del activo (subyacente).
- K es el precio de ejercicio de la opcion.
- r la tasa anual de interés
- σ es la volatilidad del subyacente.

Con estas variables se define la fórmula para determinar el valor de una opción según su naturaleza, C_t para el caso de una Call y P_t si estamos hablando de una Put.

$$C_t = N(d_1)S_t - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{4.1}$$

$$P_t = -N(-d_1)S_t - Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) \tag{4.2}$$

donde

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S_t}{K}) + (T-t)\left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{4.3}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{ln(\frac{S_t}{K}) + (T-t)\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{4.4}$$

Nota 4.1.1. *Se puede observar que la variable μ desapareció de la fórmula final de Black Scholes, esta variable que representa la tasa de retorno, es afectada por la preferencia de riesgo, esto implica que la fórmula conlleva un "riesgo neutro".*

4.1.2. Supuestos Basicos del Modelo de Black-Scholes

- El activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato.
- El precio del activo subyacente es conducido por el movimiento geomtrico Browniano.
- La volatilidad del precio del activo subyacente se mantiene constante a través del tiempo.
- Las ventas en corto del subyacente en cuestión son permitidas.
- El mercado del subyacente es líquido y divisible, es decir, el subyacente siempre se puede comprar y vender en cualquier fracción del título
- No hay costos de transacción (comisiones e impuestos).
- El mercado opera en forma continua, es decir, no hay sábados, domingos ni días festivos.
- Existe un mercado de crédito, un sistema bancario, en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interépara todos los plazos, y libre de riesgo (tasa de interés pasiva igual a la activa).
- Todos los agentes comparten exactamente la misma información, es decir, la información es simétrica.
- Los mercados están en equilibrio, es decir, no existen oportunidades de arbitraje.

Ejemplo 4.1.1. *El precio de la acción seis meses antes del vencimiento de una opción es de* \$42*, el precio de ejercicio de la opción es de* \$40*, la tasa de interés libre de riesgo es de* 10 % *anual y la volatilidad es de* 20 % *anual. Esto significa que* $S_0 = 42, K = 40, r - 0.1, \sigma = 0.2, T = 0.5$,

$$d_1 = \frac{ln(42/40) + (0.1 + 0.2^2/2) \times 0.5}{0.2\sqrt{0.5}} = 0.7693$$

$$d_2 = \frac{ln(42/40) + (0.1 - 0.2^2/2) \times 0.5}{0.2\sqrt{0.5}} = 0.6278$$

y

$$p = 38.049 \times N(-0.6278) - 42 \times N(-0.7693)$$

Si usamos la aproximación polinómica (utilizando las tablas que se encuentra al respaldo del libro [2]), obtenemos

$$N(0.7693) = 0.7791, \quad N(-0.7693) = 0.2209$$

$$N(0.6278) = 0.7349, \quad N(-0.6278) = 0.2651$$

de modo que

$$c = 4.76, \quad p = 0.81$$

Si ignoramos el valor del dinero en el tiempo, el precio de la acción debe aumentar \$2.76 *para que el comprador de la opción de compra termine sin pérdidas. Del mismo modo, el precio de la acción debe bajar* \$2.81 *para que el comprador de la opción de venta termine en el punto de equilibrio.*

4.2. Volatilidad Implícita

La fórmula original planteada por Black y Scholes en 1973 permite obtener un precio teórico para una opción europea sobre acciones que no pagan dividendos en función de: el valor actual del activo subyacente, el precio de ejercicio, el tiempo de vencimiento, el tipo de interés libre de riesgo y la volatilidad del activo subyacente. De las variables mencionadas anteriormente, la única que es desconocida al valuar una opción es la volatilidad del subyacente. Por tanto, obtener una buena estimación de la volatilidad es crucial para valuar una opción y se mide habitualmente como la desviación típica de la rentabilidad de dicho activo.

El principal problema que presenta el cálculo de la volatilidad implícita en el precio de mercado de una opción es que no se conoce una fórmula explícita para invertir la fórmula de Black-Scholes y despejar la volatilidad en función del precio y del resto de variables; debido a lo cual, el principal enfoque práctico para obtener la volatilidad implícita consiste en utilizar métodos numéricos y fórmulas aproximadas. En efecto, la Volatilidad implícita asume el modelo de Black-Scholes pero con σ como parámetro libre, fijando S y t, con estos supuestos se puede despejar σ obteniendo para esta una fórmula que depende de los otros parámetros del modelo de BS (esto supone que la volatilidad esta ”incluida” en el precio).

Nota 4.2.1. *Hay un principio general conocido como valuación neutral al riesgo, el cual establece que cualquier título que depende de otros títulos negociados puede valuarse bajo el supuesto de que el mundo es neutral al riesgo. El resultado demuestra ser muy útil en la práctica. En un mundo neutral al riesgo, el rendimiento esperado de todos los títulos es la tasa de interés libre de riesgo, y la tasa de descuento correcta para los flujos de efectivo esperados también es la tasa de interés libre de riesgo.*

4.3. Deducción de la Ecuación Diferencial Parcial de Black-Scholes

4.3.1. Análisis al Modelo de Black-Scholes

Supongamos que tenemos una opción cuyo valor $V(S,t)$ depende sólo de S y t. En esta etapa no es necesario especificar si V es una compra o una venta; de hecho, V puede ser el valor de todo un portafolio de opciones diferentes, aunque por simplicidad el lector puede pensar en una simple compra o venta. Esto da los caminos aleatorios seguida por V. Ahora construir un portafolio que consta de una opción y un número $-\Delta$ del activo subyacente. Este número aún no está especificado. El valor de este portafolio es:

$$\Pi = V - \Delta S. \tag{4.5}$$

Un cambio en el valor de este portafolio en un paso de tiempo es

$$d\Pi = dV - \Delta dS.$$

Aquí Δ se mantiene fijo durante el paso del tiempo; si no fuera así, $d\Pi$ contendría términos en $d\Delta$. Poniendo (3.1),(4.11) y (4.3.1) juntos, encontramos que Δ sigue el camino aleatorio

$$d\Pi = \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dX + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \Delta S \right) dt \tag{4.6}$$

Como demostramos en la sección 2.4, podemos eliminar el componente aleatorio en esta caminata aleatoria eligiendo

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \tag{4.7}$$

Tenga en cuenta que Δ es el valor de $\partial V/\partial S$ al inicio del paso de tiempo dt. Esto resulta en un portafolio cuyo incremento es totalmente determinista:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \tag{4.8}$$

Ahora apelamos a los conceptos de arbitraje, oferta y demanda. Con la suposición de que no hay costos de transacción. El rendimiento de una cantidad invertida en activos sin riesgo vería un crecimiento de $r\Pi dt$ en un tiempo de dt. Si el lado derecho de (4.8) fuera mayor que esta cantidad, un árbitro podría obtener un beneficio sin riesgo garantizado al pedir un prestamo con una cantidad de Π para invertir en el portafolio. El rendimiento de esta estrategia sin riesgo sería mayor que el costo del préstamo. Por el contrario, si el lado derecho de (4.8) fuera menor de $r\Pi dt$ entonces el arbitrador acortaría al portafolio e invertiría Π en el banco. De cualquier manera el arbitrador haría una ganancia instantánea, sin costo, sin riesgo. La existencia de tales arbitradores con la capacidad de operar a bajo costo asegura que el rendimiento de la cartera y el de la cuenta sin riesgo sean más o menos iguales. Por lo tanto tenemos

$$r\Pi dt = \left(\frac{\partial V}{\partial V} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt \tag{4.9}$$

Subsituyendo (4.11) y (4.7) en (4.9) y dividiendo por dt llegamos a

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{4.10}$$

Esta es la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes. Con sus extensiones y variantes, juega el papel principal en el resto del trabajo. Es difícil exagerar el hecho de que, según las hipótesis expuestas anteriormente, cualquier valor derivado cuyo precio dependa sólo del valor actual de S y de t, y que se pague por adelantado, debe satisfacer la ecuación de Black-Scholes (o una variante que incorpore dividendos o parámetros dependientes del tiempo). Muchos problemas de valoración de opciones aparentemente complicadas, como las opciones exóticas, se vuelven simples cuando se miran de esta manera. Sin embargo, también es importante señalar que muchas opciones, por ejemplo la opción Americana, tienen valores que dependen del historial del precio del activo así como de su valor actual. Usando la ecuación (3.10) de Itô, podemos escribir

$$dV = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dX + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right) dt \tag{4.11}$$

Vemos más tarde cómo encajan en el marco de Black-Scholes. Antes de seguir adelante, hacemos tres comentarios sobre la derivación que acabamos de ver. En primer lugar, el delta, dar por

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

es la tasa de cambio del valor de nuestra opción o portafolio de opciones con respecto a

S. Es de fundamental importancia tanto en la teoría como en la práctica, y volvemos a ella repetidamente. Es una medida de la correlación entre los movimientos de la opción u otros productos derivados y los del activo subyacente.
En segundo lugar, el operador diferencial lineal $\mathcal{L}_{BS}$ da por

$$\mathcal{L}_{BS} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + rS\frac{\partial}{\partial S} - r$$

tiene una interpretación financiera como medida de la diferencia entre el rendimiento de un portafolio de opciones cubiertas (los dos primeros términos) y el rendimiento de un depósito bancario (los dos últimos términos). Aunque esta diferencia debe ser idéntica a cero para una opción europea, a fin de evitar el arbitraje. En tercer lugar, observamos que la ecuación de Black-Scholes (6.1) no contiene el parámetro de crecimiento μ. En otras palabras, el valor de una opción es independiente de la rapidez o la lentitud con que crezca un activo.

4.3.2. Derivación de la Ecuación de Black-Scholes; Primera Versión

La siguiente derivación es hecha, para la valuación de opciones, futuros y otros derivados: Supongamos que un activo subyacente (típicamente el stock S sigue el movimiento Browniano geométrico, es decir,

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dX$$

donde X es el movimiento Browniano. Note que X y en consecuencia sus incrementos infinitesimales dX representan una fuente de incertidumbre en la historia de los precios de stock. Intuitivamente, $X(t)$ es un proceso que se mueve hacia arriba y abajo de manera aleatoria que su cambio esperado durante cualquier intervalo de tiempo es 0, (media cero). Ademas su varianza en un intervalo de tiempo de duración T es T mismo; una buena analogía discreta para X es una simple caminata aleatoria. Así, la ecuación anterior indica que la tasa infinitesimal de retorno de la acción tiene un valor esperado de dt y varianza $\sigma^2 dt$. Si se conoce el pago final o recompensa de una opción $V(S;t)$ al tiempo de madurez T; Para encontrar su valor en cualquier tiempo (anterior) $t \in [0;T)$ tenemos que saber como evoluciona V como función de S y de t. Por el lema de Itô en dos variables tenemos,

$$dV = \left(\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt + \mu S\frac{\partial V}{\partial S} dX$$

Ahora consideremos algunos portafolios, llamado portafolios Delta, o Delta- Cobertura; ésta es una estrategia que tiene como objetivo reducir (cubrir) los riesgos asociados a los movimientos de precios en el activo subyacente. Tipicamente, las opciones con altas relaciones de cobertura son generalmente más rentable de comprar. Luego, el valor de el portafolio o cartera "delta hedge portfolio", esta dada por la ecuación:

$$\pi = -V + \frac{\partial V}{\partial S} S$$

en el periodo de tiempo $[t; t + \Delta t]$ la utilidad o perdida total de los cambios en los valores de las coberturas es:

$$\Delta\pi = -\Delta V + \frac{\partial v}{\partial S}\Delta S$$

ahora, reemplazando Δ por las diferenciales, tenemos

$$\begin{aligned} \Delta S &= \mu S \Delta t + \sigma S \Delta X \\ \Delta V &= \left(\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) \Delta t + \mu S\frac{\partial V}{\partial S}\Delta X \end{aligned}$$

ahora, sustituyendo en la expresión para $\Delta\pi$ tenemos,

$$\Delta\pi = \left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\Delta t$$

Observe que el termino ΔX ha desaparecido. Así, la incertidumbre ha sido eliminada y la cartera o portafolios es efectivamente libre de riesgo. La tasa de rendimiento de estos protafolios debe ser igual a la tasa de rendimiento de cualquier otro instrumento libre de riesgo, de lo contrario, habría oportunidades de arbitraje. Ahora suponiendo que la tasa libre de riesgo de retorno es r, debemos tener durante el período de tiempo $[t; t + \Delta t]$:

$$r\pi\Delta t = \Delta\pi$$

Si ahora comparamos nuestros dos formulas para $\Delta\pi$ obtenemos:

$$\left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\Delta t = r\left(-V + S\frac{\partial V}{\partial S}\right)\Delta t$$

Simplificando, se llega a la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

En el modelo de Black-Scholes, se tienen que cumplir, que V sea dos veces diferenciable con respecto a S y una vez con respecto a t, el modelo sirve para evaluar cualquier tipo de opciones. Diferentes forrmulas para los precio de varias opciones surgen de la elección de la función de pagos al tiempo de vencimiento y las condiciones de frontera adecuadas. Una sutileza oscura en el método de discretización anterior es que el cambio infinitesimal en el valor de la cartera o portafolios se debió unicamente a los cambios infinitesimales en los valores de los activos, y no se debió a los cambios en las posiciones en los activos. En otras palabras, el porfolio se supone que es autofinanciable. Esto puede ser demostrado en el contexto continuo utilizando los resultados basicos de la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas.

4.3.3. Derivación de la Ecuación de Black-Scholes; Segunda Versión

Supongamos que el precio de las acciones al tiempo t es S_t. Definamos $u = e^{\sigma\sqrt{dt}}$ y $d = e^{-}\sigma\sqrt{dt}$. Al tiempo $t + dt$ el precio de las acciones se mueve hacia arriba para ser $S^u_{t+dt} = uS_t$ con probabilidad

$$p = \frac{e^{rdt} - d}{u - d}$$

o que el precio de las acciones se mueve hacia abajo para ser $S^d_{t+dt} = dS_t$ con probabilidad $1 - p$. La valuación del derivado con riesgo neutral da lugar a la siguiente relación:

$$Ve^{rdt} = pV_u + (1-p)V_d = p(V_u - V_d) + V_d$$

donde $V = V(S_t), V_u = V(S^u_{t+dt})$ y $V_d = V(S^d_{t+dt})$. Ahora tomaremos expansión en serie de Taylor para $V_u, V_d, erdt; uyd$ hasta primer orden. Tenemos así:

$$V_u \approx V + \frac{\partial V}{\partial S}(S^u_{t+dt} - S_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S^u_{t+dt} - S_t)^2 + \frac{\partial V}{\partial t}dt$$

$$= V + \frac{\partial V}{\partial S}S_t(u-1) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S_t^2(u-1)^2 + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Similarmente:

$$V_d = V + \frac{\partial V}{\partial S}S_t(d-1) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S_t^2(u-1)^2 + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Las otras expansiones a primer orden de dt son:

$$e^r dt \approx 1 + rdt$$

$$u \approx 1 + \sigma\sqrt{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

$$d \approx 1 - \sigma\sqrt{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

Note que $(u-1)^2 = (d-1)^2 = \sigma^2 dt$, esto implica que podemos escribir,

$$p(V_u - V_d) = p(u-d)\frac{\partial V}{\partial S}S_t = (rdt + \sigma\sqrt{dt} - \frac{1}{2}\sigma^2 dt)\frac{\partial V}{\partial S}S_t$$

Sustituyendo estas aproximaciones en la igualdad para Ve^{rdt} tenemos

$$V(1+rdt) = rS_t\frac{\partial V}{\partial S}dt + V + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt + \frac{\partial V}{\partial t}dt$$

ahora, cancelando a ambos lados V y luego dividiendo por dt, obtenemos la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rs\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

4.4. Solución de la Ecuación Diferencial Parcial de Black-Scholes mediante Sustituciones y la Transformada de Fourier

Debido a la no **estacionariedad** de las ecuaciones diferenciales estocásticas (sus propiedades estadísticas son invariantes ante una traslación del tiempo) y más precisamente la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes. Mediante sustituciones, llegamos a la conocida **ecuación de difusión**, el cual, se hace **útil** utilizar allí una transformada tiempo-frecuencia que pueda reflejar los cambios en frecuencia con respecto al tiempo y mejorando los resultados. Mostraremos aquí la solución analítica para la ecuación de Black-Scholes bajo las condiciones de Opciones de compra europeas. [16, pág 11]

Obtendrémos $V(s;t)$ tal que

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}s^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + rs\frac{\partial V}{\partial s} - rV = 0 \tag{4.12}$$

$$V(0,T) = 0, \quad \forall t$$

$$V(s,T) = max\{s - K, 0\}$$

$$s \in [0, +\infty), \quad t \in [0,T].$$

Haciendo el siguiente cambio de variable necesario para llegar a la solución y obtener una expresión más sencilla de manejar:

$$x = \ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$$

$$\tau = (T-t)$$

$$u = Ve^{r(T-t)}$$

Por lo tanto, se deduce que

$$s = Ke^{x-(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}:$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{s} = \frac{1}{K}e^{-(x-(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau)} = \frac{1}{K}e^{-x+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau};$$

$$\frac{dx}{dt} = -\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right);$$

$$\frac{d\tau}{dt} = -1, \quad \frac{d\tau}{ds} = 0;$$

$$V = ue^{-r\tau};$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial(ue^{-r\tau})}{\partial x}\left(-r + \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{\partial(ue^{-r\tau})}{\partial \tau}(-1) = e^{-r\tau}\left[u_x\left(-r + \frac{\sigma^2}{2}\right) - u_\tau + ru\right];$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial V}{\partial \tau}\frac{d\tau}{dx} = \frac{\partial(ue^{-r\tau})}{\partial x}\frac{1}{K}e^{-x+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau} + 0 = \frac{1}{K}e^{-\left(x+\frac{\sigma^2}{2}\tau\right)}u_x;$$

$$\frac{\partial V_s}{\partial s} = \frac{\partial V_s}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial V_s}{\partial \tau}\frac{d\tau}{dx} = \frac{\partial(\frac{e^{-(x+\frac{\sigma^2\tau}{2})}}{K})u_x}{\partial x}\frac{1}{K}e^{-x+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau} + 0;$$

$$= \frac{1}{K^2}e^{-x+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau)}e^{-(x+\frac{\sigma^2\tau}{2})}(U_{xx} - u_x) = \frac{1}{K^2}e^{-2x+(r-\sigma^2)\tau}(U_{xx} - u_x);$$

Sustituyendo $V_t; V_s; V_{ss}$ y s en (4.24), tenemos:

$$e^{r\tau}\left[u_x\left(-r+\frac{\sigma^2}{2}\right)-u_\tau+ru\right]+\frac{\sigma^2}{2}\left(Ke^{x-(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}\right)^2\frac{1}{K^2}e^{-2x+(r-\sigma^2)\tau}(U_{xx}-u_x)+$$

$$+rKe^{x-(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}\frac{1}{K}e^{-(x+\frac{\sigma^2\tau}{2})}u_x-rue^{-r\tau}=0$$

$$\Rightarrow e^{r\tau}\left[u_x(-r+\frac{\sigma^2}{2})-u_\tau+\frac{\sigma^2}{2}u_{xx}+ru_x-\frac{\sigma^2}{2}u_x\right]=0$$

$$\Rightarrow u_\tau=\frac{\sigma^2}{2}u_{xx}$$

Condición final:

$$V(s;T)=max\left\{s-K,0\right\}$$

cuando $t=T$ y $\tau=0$

$$V(s;T)=ue^{-r\tau}|_{\tau=0}$$

$$=u_0(x)=max\left\{K(e^x-1),0\right\}$$

$$=Kmax\left\{e^x-1,0\right\}.$$

Definición 4.4.1 (Transformada de Fourier)**.** *Dada una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, se define formalmente su transformada de Fourier como la función de variable real $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, definida como*

$$F(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iwx}f(x)\,dx. \qquad w\in\mathbb{R}$$

Ejemplo 4.4.1. *Consideremos la ecuacion de difusión o calor, con las siguientes condiciones iniciales:*

$$U(w,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iwx}u(x,0)\,dx \tag{4.13}$$

La solución para U es

$$U(w,\tau)=A(w)e^{-\frac{w^2\sigma^2}{2}\tau}.$$

Utiliando las condiciones iniciales tenemos

$$F(w) = U(w,0) = A(w)e^{-\frac{w^2\sigma^2}{2}\tau}|_0^1$$

esto es

$$U(w,\tau) = F(w)e^{-\frac{w^2\sigma^2}{2}\tau}.$$

Para obtener u devemos aplicar la tranformada inversa a U, esto es

$$u(x.\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} F(w) e^{-\frac{w^2\sigma^2}{2}\tau}\, dw.$$

Tenemos en la integración de lo transformado un producto de transformadas de Fourier, de esa manera la solución está dado por una convolución de dos funciones usando el teorema de Convolución de Fourier que dice

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} F(w)G(w)\, dw,$$

donde F y G son las transformaciones de f y g, respectivamente, podemos encontrar u, pero antes de que necesitemos la transformación inversa $G(w) = e^{\frac{-w^2\sigma^2}{2}\tau}$.

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwz} e^{\frac{w^2\sigma^2}{2}\tau}\, dw$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} e^{-(iwz + \frac{w^2\sigma^2}{2}\tau)}\, dw$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{w\sigma\sqrt{t}}{\sqrt{2}} + \frac{iz\sqrt{2}}{2\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2 - \frac{z^2}{2\sigma^2\tau}}\, dw$$

$$= \frac{e^{-\frac{z^2}{2\sigma\tau}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{w\sigma\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}} + \frac{iz\sqrt{2}}{2\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2}\, dw,$$

Haciendo un nuevo cambio de variable tenemos

$$k = \frac{w\sigma\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}} + \frac{iz\sqrt{2}}{2\sigma\sqrt{\tau}} \qquad dk = \sigma\sqrt{\frac{\tau}{2}\, dw}$$

En efecto,

$$g(z)=\frac{e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2\tau}}\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-k^2}\quad dk=\frac{e_{\frac{z^2}{2\sigma\tau}}}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

entonces

$$u(x,\tau)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}u_0(z)e^{-\frac{(x-z)^2}{2\sigma^2\tau}}\,dz.$$

Como

$$u_0(z)=Kmax\{e^z-1,0\},$$

tenemos

$$u(x,\tau)=\frac{k}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\int_{0}^{\infty}(e^z-1)e^{-\frac{(x-z)^2}{2\sigma^2\tau}}\,dz,$$

Haciendo otro cambio de variable

$$y=\frac{x-z}{\sigma\sqrt{\tau}}\qquad dy=\frac{-\,dz}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

si $z=0$ *esto implica que,* $y=\frac{x}{\sigma\sqrt{\tau}}$, *cuando* $z,y\longrightarrow\infty$
Así

$$\begin{aligned}u(x,\tau)&=\frac{K}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\int_{\frac{x}{\sigma\sqrt{\tau}}}^{-\infty}(1-e^{x-y\sigma\sqrt{\tau}})e^{-\frac{y^2}{2}}\sigma\sqrt{\tau}\,dy\\&=\frac{K}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sigma\sqrt{\tau}}}e^(x-y\sigma\sqrt{\tau}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy-\frac{K}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sigma\sqrt{\tau}}}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\\&=\frac{Ke^{x+\frac{\sigma^2\tau}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sigma\sqrt{\tau}}}e^{-\left(\frac{y}{\sqrt{2}}+\frac{\sigma\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dy-\frac{K}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sigma\sqrt{\tau}}}e^{\frac{-y^2}{2}}\,dy\end{aligned}$$

Variables cambiantes en la primera integral

$$p=y+\sigma\sqrt{\tau}\qquad dp=dy$$

si $y=\frac{x}{\sigma\sqrt{\tau}}$ *entonces* $p=\frac{x+\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$ *cuando* $y,p\longrightarrow\infty$, *dejándonos con la siguiente expresión*

$$u(x,\tau)=\frac{Ke^{(x+\frac{\sigma^2\tau}{2})}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x+\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}}e^{-\frac{p^2}{2}}dp-\frac{K}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sigma\sqrt{\tau}}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy,$$

se define

$$N(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{a} -\frac{q^2}{2} dq,$$

nuestra solución es

$$u(x, \tau) = Ke^{(x + \frac{\sigma^2 \tau}{2})} N(d_1) - KN(d_2),$$

donde

$$d_1 = \frac{x + \sigma^2 \tau}{\sigma\sqrt{\tau}}; \qquad d_2 = \frac{x}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

Finalmente, volviendo a la ecuación original tenemos

$$\begin{aligned} V(s,t) &= \left\{ KN(d_1) e^{\left[\ln\left(\frac{s}{K}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right]} - KN(d_2) \right\} e^{-r(T-t)} \\ &= \left[sN(d_1) e^{r(T-t)} - KN(d_2) \right] e^{-r(T-t)} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$V(s,t) = sN(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{s}{K}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\ln\left(\frac{s}{K}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

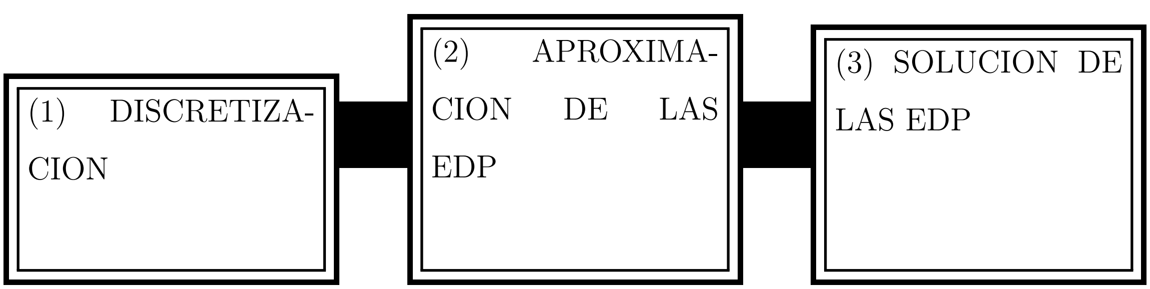
y

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{s}{K}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Capítulo 5

Método Diferencias Finitas

Los primeros que aplicaron el método de diferencia finita en la evaluaciones de opciones fueron Brennan y Schwartz (1985) evalúan opciones compuestas aplicadas a la evaluación de un proyecto de una mina de cobre. El método de diferencia finita (DF) permite la solución aproximada de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP) definidas en un dominio finito. La generalidad del método (DF) es especialmente importante en modelos que se extienden más allá de los coeficientes constantes del modelo de Black-Scholes. El método de diferencia finita puede manejar procesos con coeficientes variables en el tiempo, modelos de tasa de interés simples o multifactoriales, etc. En base en esto, la solución por el metodo de (DF) basicamente involucra 3 pasos: (1) Discretización, (2) aproximación de las (EDP) y (3) solución de las (EDP).



5.1. Discretización

La discretización es un proceso matemático mediante el cual vamos a obtener resultados aproximados de la ecuación diferencial del problema. En base de lo anterior, el objetivo final de la discretizacion es reducir los sistemas continuos a sistemas discretos (parámetros agrupados)'equivalentes' que son adecuados para la solución informática de alta velocidad.

La aproximación básica implica el reemplazo de un dominio continuo **D** por un patrón, red o malla de puntos discretos dentro de **D**, como el se muestra en la figura 5.1 para dos dimensiones. En lugar de desarrollar una solución definido en todas partes en **D**, sólo se obtienen aproximaciones en el aislado puntos etiquetados como $P_{i,j}$. Valores intermedios, integrales, derivadas u otro operador Los valores pueden obtenerse de esta solución discreta por interpolación.[6]

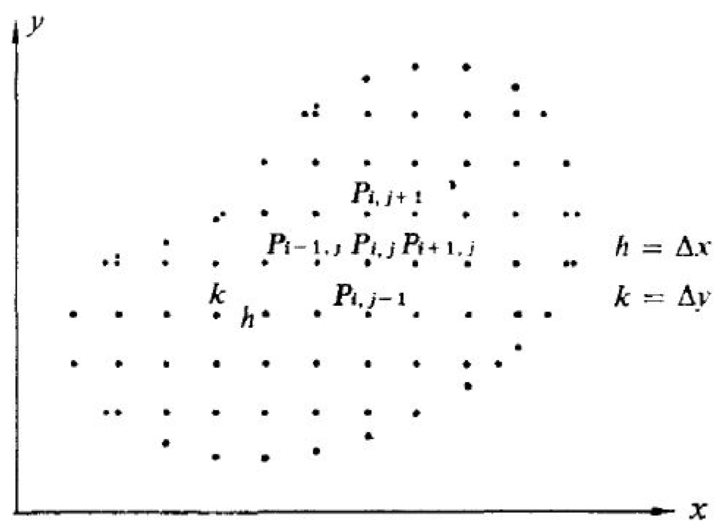


Figura 5.1: Discretización

[6]

En el primer paso las ecuaciones que gobiernan el proceso de interes, así como las condiciones de borde, son convertidas a un sistema discreto de ecuaciones algebraicas; este proceso se denomina discretización. Al reeemplazar los términos diferenciales individuales de la EDPs por expresiones algebraicas que conectan valores en nodos de una red finita se introduce un error de truncamiento.

El segundo paso requiere de un método de resolución del sistema de ecuaciones algebraicas. Este paso también puede introducir un error (de solución) pero es generalmente despreciable comparado con el error de truncamiento introducido durante la discretización, a menos que el método sea inestable.

5.2. El Método de Diferencias Finitas

El método consiste en una aproximación de las derivadas parciales por expresiones algebraicas con los valores de la variable dependiente en un limitado número de puntos seleccionados. Como resultado de la aproximación, la ecuación diferencial parcial que describe el problema es reemplazada por un número finito de ecuaciones algebraicas, en términos de los valores de la variable dependiente en puntos seleccionados.

5.2.1. Deducción de las fórmulas de diferencias finitas

Las fórmulas de diferencias finitas pueden ser deducidas geométricamente o usando series de Taylor. La derivada en un punto está dada por

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \tag{5.1}$$

si se asume que h es pequeña, da como resultado que

$$F'(x) \approx \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \tag{5.2}$$

esta fórmula es una aproximación a la primera derivada. Es importante notar que la (5.2) establece que ambas partes son "*casi*" iguales, lo que implica que existe un error de truncamiento.

$$F'(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + error. \tag{5.3}$$

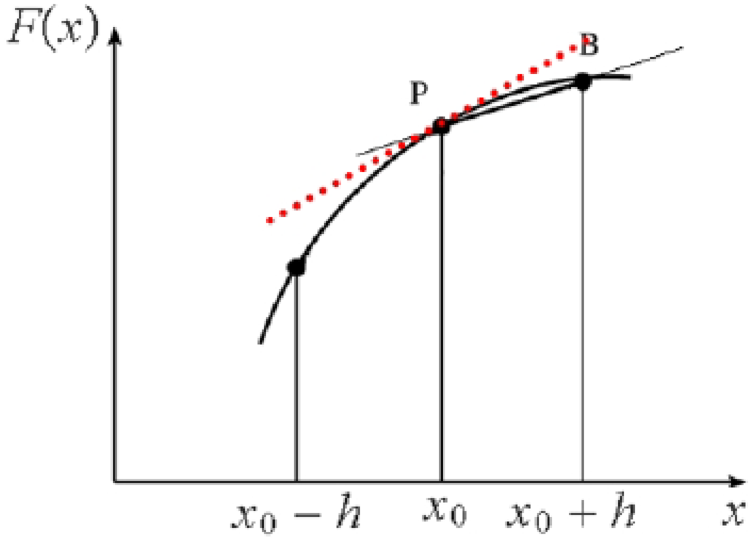


Figura 5.2: Comparación entre la derivada analítica (recta punteada) y la derivada aproximada por diferencia hacia adelante $\overline{PB}$ (recta continua).

[6]

A la ecuación (5.3) se le conoce como *diferencia hacia delante* para la primera derivada.

Geométricamente, como se observa en la figura (5.2), esta formula representa la pendiente de la linea secante que conecta los dos puntos $(x, F(x))$ y $(x+h, F(x+h))$. Este método para obtener las aproximaciones de diferencia finita es intuitivo, un método más general es la utilización de la serie de Taylor.

5.2.2. Aplicación de la Serie de Taylor

La serie de Taylor es la herramienta más importante en el análisis del método de diferencias finitas. Esta puede escribirse de la siguiente forma:

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \frac{h^3}{3!}F'''(x) + ...$$

Para obtener la primera derivada se despeja $F'(x)$,

$$F'(x) = \frac{F(x+h) - \left[F(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \frac{h^3}{3!}F'''(x) + ...\right]}{h}$$

reordenando,

$$F'(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \left(\frac{h}{2!}F''(x) + \frac{h^2}{3!}F'''(x) + ...\right)$$

finalmente, se trunca la serie, dando como resultado una formula que contiene un error cuyo orden es el del valor mayor de h^nde la parte no tomada en cuenta

$$F'(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + O(h) \tag{5.4}$$

La ecuación (5.4) corresponde a la formula de diferencia hacia adelante para la primera derivada con orden de error $O(h)$, lo que en este caso, significa que el error de la aproximación es proporcional al tamaño del incremento h. Se lee como **error de orden** h^n o **error de truncamiento**.

Por otro lado, al tomar el incremento h hacia atrás en la serie de Taylor se obtiene,

$$F(x-h) = F(x) - hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) - \frac{h^3}{3!}F'''(x) + ...$$

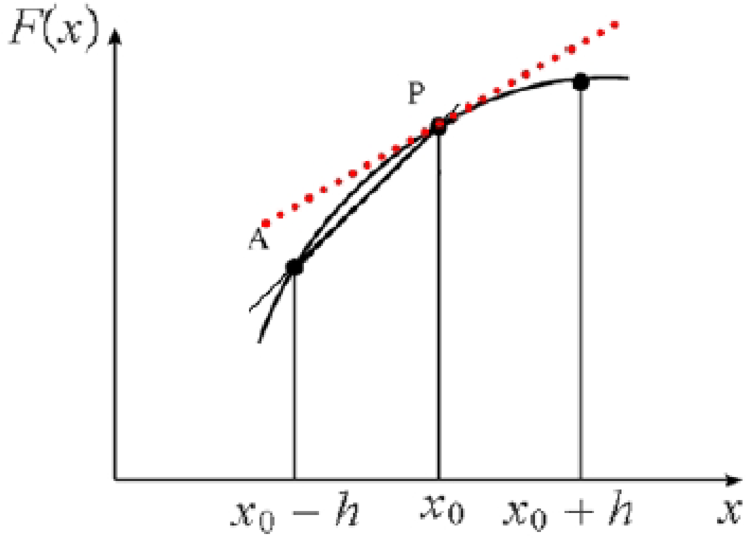


Figura 5.3: Comparación entre la derivada analítica (recta punteada) y la derivada aproximada por diferencia hacia atrás $\overline{AP}$ (recta continua).

[6]

despejando $F'(x)$,

$$-hF'(x) = F(x-h) - \left[F(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) - \frac{h^3}{3!}F'''(x) + ...\right]$$

al reagrupar,

$$F'(x) = \frac{F(x) - F(x-h)}{h} + \left(\frac{h}{2!}F''(x) - \frac{h^2}{3!}F'''(x) + ...\right) \tag{5.5}$$

finalmente, se obtiene la formula de diferencia hacia atrás para la primera derivada con orden de error h,

$$F'(x) = \frac{F(x) - F(x-h)}{h} + O(h) \tag{5.6}$$

La cual se representa en la figura (6.11).

Sumando las series de Taylor hacia adelante y hacia atrás la aproximación a la primera derivada por diferencia central es

$$F'(x) = \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} + O(h^2), \tag{5.7}$$

cuyo representación se muestra en la figura (5.4).

Al comparar las formulas para la primera derivada de diferencia hacia delante ecuación (5.4), hacia atrás ecuación (5.6) y central ecuación (5.7), se aprecia que cada una de ellas requiere la misma cantidad de puntos de la malla para aproximar la derivada en un punto (en este caso dos puntos), la diferencia consiste en que la formula de diferencia centrada tiene un error de $O(h^2)$ mientras que la diferencia hacia adelante y hacia atrás tienen un error de $O(h)$.

$$O(h^2) < O(h).$$

Esto se aprecia en la figura (5.5), donde la línea que representa la solución para la diferencia centrada ($\overline{AB}$), es más cercana al resultado real que las líneas que representan el resuldado a partir de las otras opciones ($\overline{AP}$ y$\overline{PB}$).

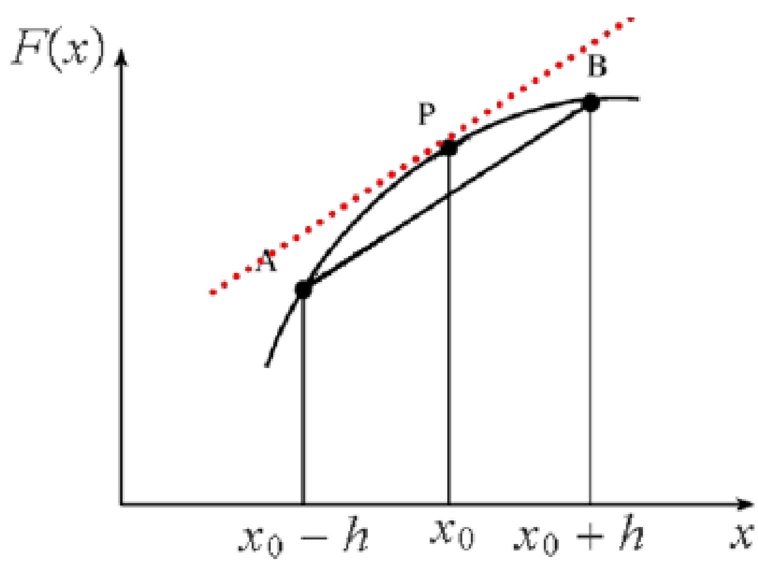


Figura 5.4: Comparación entre la derivada analítica (recta punteada) y la derivada aproximada por diferencia central $\overline{AB}$ (recta continua inferior).

[6]

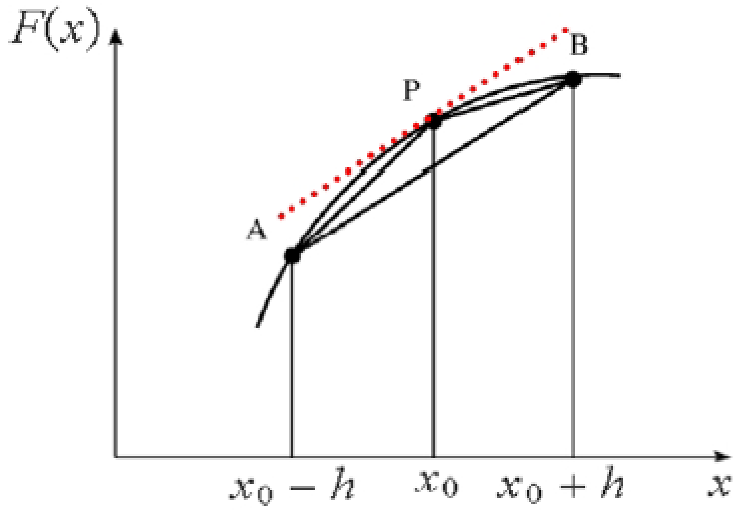


Figura 5.5: Comparación entre la derivada analítica (recta punteada) y las derivadas aproximadas (rectas $\overline{PB}, \overline{AP}$ y $\overline{AB}$).

[6]

De lo anterior, se puede concluir que la exactitud de la aproximación logra incrementarse básicamente de 2 formas:

1. **Incrementando el número de puntos tomados en la construcción de la formula**. Se obtiene una formula que involucre un mayor número de puntos de la malla y con esto incremente su exactitud. Esto se logra al desarrollar y combinar cierto número de series de Taylor tomando en cuenta un número mayor de puntos. Por ejemplo $F(x+2h), F(x+3h), etc.$

2. **Incrementando el número de puntos en la malla**. Dada una formula para cualquiera de las aproximaciones, entre mayor sea el número de puntos en la malla, menor será el valor del error.

5.2.3. Método de Coeficientes Indeterminados

Supongamos que se desea utilizar el metodo de diferencia finita hacia atras para aproximar $F'(x)$ para un error de segundo orden. Por el método de coeficientes indeterminados utilizando $F(x), F(x-h), F(x-2h)$, escribimos

$$F'(x) \approx \gamma_1 F(x) + \gamma_2 F(x-h) + \gamma_3 F(x-2h).$$

Podemos utilizar la serie de Taylor en x para obtener un sistema de ecuaciones,

$$\gamma_1 F(x)+\gamma_2 F(x-h)+\gamma_3 F(x-2h) = \gamma_1 F(x)+\gamma_2\left(F(x) - hF'(x) + \frac{h^2}{2}F''(x) - \frac{h^3}{6}F'''(x)\right) \\ + \gamma_2\left(F(x) - 2hF'(x) + \frac{4h^2}{2}F'''(x) - \frac{8h^3}{6}F'''(x)\right) + O(max|\gamma_k|h^4) \quad (5.8)$$

La combinación lineal debe de aproximar $F'(x)$. Por lo que escribimos

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$$
$$-h\gamma_2 - 2h\gamma_3 = 1$$
$$h^2\gamma_2 + 2h^2\gamma_3 = 0$$

Debido a que se esta buscando $F'(x)$, el renglón correspondiente a la primera derivada se iguala a 1.
Resolviendo el sistema obtenemos $\gamma_1 = -\frac{3}{2h}$,$\gamma_2 = \frac{2}{h}$,$\gamma_3 = -\frac{1}{2h}$. Por lo tanto, obtenemos la formula para diferencia hacia atras con orden de $O(h^2)$

$$F'(x) = \frac{3}{2h}F(x) - \frac{2}{h}F(x-h) + \frac{(x-2h)}{2h} + O(h^2) \quad (5.9)$$

escrito de otra forma,

$$F'(x) = \frac{F(x-2h) - 4F(x-h) + 3F(x)}{2h} + O(h^2)$$

Nota: La serie de Taylor y el método de diferencias finitas asume que la función a se resuelta varia de forma continua, dicho esto, no existen discontinuidades.

Capítulo 6

Aproximación Numérica del Modelo de Black-Scholes

En 1973 Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton lograron uno de los mayores avances en la valuación de opciones hasta ese momento, conocido como el modelo de Black-Scholes, que ha tenido una gran influencia en la manera en que los agentes evalúan y cubren opciones. Ha sido también un punto de referencia para el desarrollo y éxito en la teoría de las finanzas matemáticas. La importancia del modelo fue reconocida cuando Robert Merton y Myron Scholes fueron premiados con el Premio Nobel de Economía en 1997.

Esta ecuación surge del movimiento Browniano, el cual 1827, cuando Robert Brown examinaba las partículas del polen de una planta de la especie Clarckia Pulcella, con gran desconcierto encontró que dichas partículas se movían constantemente y se desplazaban de forma impredescible.

Este trabajo contiene una introducción elemental al uso del método en Diferencia Finitas para la resolución numérica de las ecuaciones en Derivadas Parcial Estocásticas que aparecen en la modelización de los derivados financieros, en particular de los contratos europeos, como se encuentra **[5], [7],[15] y[16]** . El modelo de Black-Scholes a través del tiempo ha evolucionado con el uso de herramientas informáticas; donde se obtiene el valor y se genera resultados de una manera rápida y sencilla, requeridos para el análisis en la toma de decisiones, como se estudia **[16][20]**. Uno de los modelos creados basado en el modelo de B-S es el modelo de difusión de salto exponencial doble de los principales atractivos es su simplicidad, en particular su manejabilidad analítica para opciones dependientes de la trayectoria y derivados de tipos de interés, es mencionado por Kou **[17]**. Despues de analizar el modelo B-S y su volatilidad implicita, a partir de estos hechos, se crea un nuevo modelo que estudia la volatilidad estocástica, el cual, se modela bajo un sistema de dos Ecuaciones Diferenciales Estocásticas acopladas que representan el comportamiento dinamico del activo subyacente y las otras dinámicas de la volatilidad, el cual son Movimientos Brownianos correlacionados, es estudiado por Marin y Guzman **[18]**. Las simulación de Monte carlo generan trayectorias basados en un Proceso Estocástico del precio de un activo financiero, el cual se estima un valor de la opción usando como tasa de descuento la tasa libre de riesgo: sin embargo a medida de mayor simulaciones en un Movimiento Browniano Geométrico, dicho valor de la opción converge a la solución de la formua de B-S para una call europea, como lo menciona Villamil **[19]**. El Método de Diferencias Finitas para fijar el precio de las Opciones Europeas bajo el modelo de difusión por salto con amplitud constante. Usando el término de difusión en el modelo de salto de diferencia aproximada del cociente de diferencia central, y usando los ítems de salto en el modelo de aproximación del álgebra matricial, el diferencial ordinario obtenido por el discreto, como se muestra en **[21]**. Se desarrolla un método numérico basado en una malla móvil adaptativa. Se utiliza un Método de Diferencias Finitas para discretizar la ecuación de Black-Scholes fraccional en el tiempo y se deriva el análisis de errores para el esquema de discretización. Luego, se establece una malla móvil adaptativa basada en un análisis de error a priori mediante la función de monitor de equidistribución, se estudian en **[22]**

Desde entonces el estudio de dicho fenómeno ha causado gran interés por parte de diferentes expertos en distintas ciencias exactas, entre ellas las matemáticas. Bajo ciertos supuestos de Black y Scholes se presento la ecuación diferencial parcial de segundo orden de tipo parabólico:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{6.1}$$

donde:

$V(S;t)$: el precio de una opción de compra europea.

t : el tiempo de inicio del contrato.

S : el precio del activo.

σ : la volatilidad.

r : la tasa de interés.

Posteriormente nos basaremos del capitulo anterior para llevar a cabo la solución de nuestra ecuación diferencia parcial estocástica (6.1) y simularemos dicha ecuación usando Matlab.

6.1. Solución del Modelo de Black-Scholes por el Método de Diferencia Finita

De acuerdo a nuestro modelo de Black-Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{6.2}$$

Se desea encontrar una función $V(S;t), V = S\times[0;T] \longrightarrow \mathbb{R}$, con $S \in \mathbb{R}_+ \equiv [0;+1)$, la cual resuelve la ecuación diferencial parcial (6.2) presentada en (6.3), con la condición (6.4):

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{ss} + rSV_s - rV = 0 \tag{6.3}$$

$$V(S,t) = f(S) = max\{S - E, 0\} \tag{6.4}$$

Donde $V(S,t)$ es el valor de una opción Europea tipo call (compra Europea), donde E es el precio Strike o ejercicio, r es la tasa libre de riesgo y σ es la volatilidad del precio, cosntantes conocidas.

6.1.1. Discretización

Inicialmente se reemplazará (6.3) en el punto $S = S_0, t = t_0$, por una aproximación basada en Diferencias Finitas deducida de la expansión en una fórmula de Taylor. Para V_t se aplica diferencia progresiva en el tiempo, donde $t_0 \leq \eta_1 \leq t_0 + \Delta t$.

$$V_t(S_0, t_0) = \frac{V(S_0, t_0 + \Delta t) - V(S_0, t_0)}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(S_0, \eta_1), \tag{6.5}$$

Para las derivadas con respecto a S, se introduce el esquema de diferencias centradas, donde $S_0 \leq \xi_1 \leq S_0 + \Delta S$, así:

$$V_S(S_0, t_0) = \frac{V(S_0 + \Delta S, t_0) - V(S_0 - \Delta S, t_0)}{2\Delta S} - \frac{(\Delta S)^2}{6}\frac{\partial^3 V}{\partial S^3}(\xi_1, t_0), \tag{6.6}$$

$$V_{SS}(S_0, t_0) = \frac{V(S_0 + \Delta S, t_0) - 2V(S_0, t_0) + V(S_0 - \Delta S, t_0)}{(\Delta S)^2} - \frac{(\Delta S)^2}{12}\frac{\partial^4 V}{\partial S^4}(\xi_1, t_0), \tag{6.7}$$

6.1.2. Aproximación de las Ecuaciones Diferenciales Parciales

Ahora se realizan los siguientes cambios para la aproximación del punto $(S_0; t_0)$, por el nodo $(j; n)$:

$$V(S_0; t_0) \simeq V_{j,n}; \quad V(S_0 + \Delta S; t_0) \simeq V_{j+1,n}; \quad V(S_0 - \Delta S; t_0) \simeq V_{j-1,n};$$

$$V(S_0; t_0 + \Delta t) \simeq V_{j,n+1}$$

Para tal propósito se define $\Delta S = h = \frac{Smax}{M}$, y se consideran $M+1$ precios iguales de activo. Se define $\Delta t = k = \frac{T}{M}$, y se consideran $N+1$ tiempos iguales (ver figura 6.1), la cual consta de $(M+1)\times(N+1)$ puntos en la red donde $n\in[0;N]$ y $j\in[0;M]$. Así el espacio de estado es $S\times[0;T]$, aproximandose a:

$$\{0,\Delta S,2\Delta S,\ldots,j\Delta S,\ldots M\Delta S\}\times\{0,\Delta T,2\Delta T,\ldots,n\Delta T,\ldots N\Delta T\}$$

El punto $(j;n)$ en la grilla, es el punto que corresponde al precio del activo $j\Delta S$ y al tiempo $n\Delta T$. Usaremos la variable $V_{j,n}$ para denotar el valor de la opción en el punto $(j;n)$.

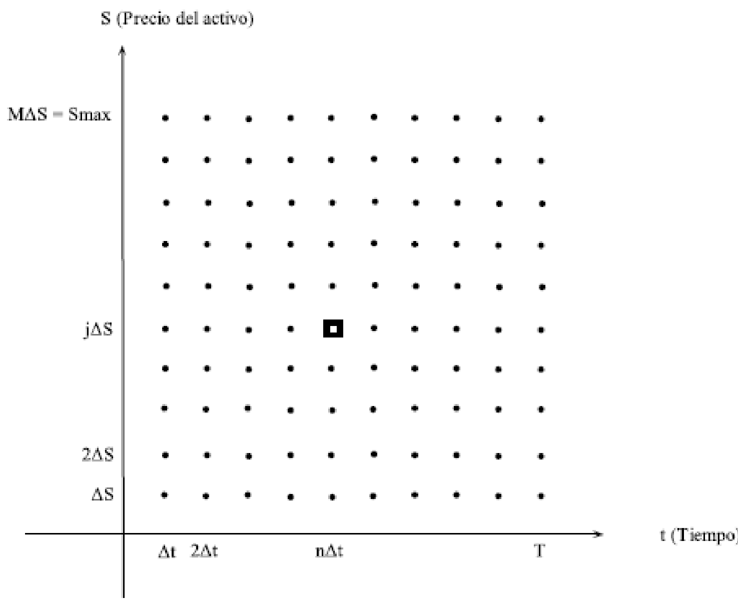


Figura 6.1: Grilla

Ahora al reemplazar (6.5−6.7) en la ecuación diferencial (6.2) y teniendo en cuenta las aproximaciones antes expuestas, se obtiene la ecuación en Diferencias Finitas método implícito al nodo $(j;n)$, para $0<j<M$ y $0\le n<N$, llegando a:

$$\frac{V(S_0,t_0+\Delta t)-V(S_0,t_0)}{\Delta t}+rS\frac{V(S_0+\Delta S,t_0)-V(S_0-\Delta S,t_0)}{2\Delta S}+$$

$$\frac{\sigma^2S^2}{2}\frac{V(S_0+\Delta S,t_0)-2V(S_0,t_0)+V(S_0-\Delta S,t_0)}{(\Delta S)^2}-rV(S_0,t_0)-ET=0$$

donde ET representa el error de truncamiento asociados a cada valor y esta dado por:

$$ET = \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(S_0.\eta_1) + rS\frac{(\Delta S)^2}{6}\frac{\partial^3 V}{\partial S^3}(\xi_1, t_0) + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{(\Delta S)^2}{12}\frac{\partial^4 V}{\partial S^4}(\xi_1, t_0). \tag{6.8}$$

Ahora al hacer la discretización, y además teniendo en cuenta que $S = j\Delta S = jh$, y al introducir la aproximación exceptuando el error de truncamiento se llega a:

$$\frac{V_{j,n+1} - V_{j,n}}{k} + rjh\frac{V_{j+1,n} - V_{j-1,n}}{2h} + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 h^2 \frac{V_{j+1,n} - 2V_{j,n} + V_{j-1,n}}{h^2} - rV_{j,n} = 0, \tag{6.9}$$

Llegando a:

$$a_j V_{j-1,n} + b_j V_{j,n} + c_j V_{j+1,n} = V_{j,n+1}; \tag{6.10}$$

donde

$$a_j = \frac{k}{2}[rj - \sigma^2 j^2], \qquad con \qquad j = 1, 2, \ldots, M+1.$$

$$b_j = 1 + k[\sigma^2 j^2 + r], \qquad con \qquad j = 1, 2, \ldots, M+1.$$

$$c_j = -\frac{k}{2}[rj + \sigma^2 j^2], \qquad con \qquad j = 1, 2, \ldots, M+1, \quad y \quad n = 1, \ldots, N.$$

La discretizacion de las condiciones iniciales de (6.4) son:

$$V_{j,n} = f(j\Delta S) = f(jh) = jh - E, \qquad con \qquad j = 1, 2, \ldots, M+1. \tag{6.11}$$

$$V_{1,n} = E, \qquad con \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

$$V_{M+1,n} = 0, \qquad con \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

6.1.3. Solución

Las ecuaciones anteriores (6.11) definen el valor de la opcion call a lo largo de los tres bordes en la grilla de la figura (6.1), cuando $S = 0, S = S_{max} = hM$ y $t = T$. La ecuación (6.10) viene dada para valores $j = 1, 2, \ldots, M$, pero quedan faltando valores para $j = 1$ y $j = M + 1$, para que el sistema tenga solución es necesario adicionar dos ecuaciones. Se cuenta con un sistema de ecuaciones que involucran los valores de funciones desconocidas. Inicialmente se tienen $M-1$ ecuaciones con $M+1$ incognitas las cuales son: $V_{1,n}, V_{2,n}, \ldots, V_{M+1,n}$.

- Para $j = 1$,
$$b_1 V_{1,n} + c_1 V_{2,n} = V_{1,n+1}. \tag{6.12}$$

- Para $j = M+1$,
$$a_{M+1} V_{M,n} + b_{M+1} V_{M+1,n} = V_{M+1,n+1}. \tag{6.13}$$

Por lo tanto se puede resumir (6.10), (6.12), (6.13) en forma matricial, asi:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_M & b_M & c_M \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{M+1} & b_{M+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1,n} \\ V_{2,n} \\ V_{3,n} \\ \vdots \\ V_{M,n} \\ V_{M+1,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1,n+1} \\ V_{2,n+1} \\ V_{3,n+1} \\ \vdots \\ V_{M,n+1} \\ V_{M+1,n+1} \end{bmatrix}$$

El sistema es de la forma $AX = B$, donde A es una matriz tridiagonal de orden $(M+1) \times (M+1)$, y sus terminos son conocidos por medio de los valores de a_j, b_j y c_j. X es un vector de orden $((M+1) \times 1)$ que representa incognitas de la forma $V_{j,n}$ con $j = 1, 2, \ldots, M+1$, y donde B es un vector columna de orden $((M+1) \times 1)$ conformado por datos conocidos de la forma $V_{j,n+1}$, con $j = 1, 2, \ldots, M+1$. Para resolver este sistema es necesario utilizar la información presentada en (6.11).

6.2. Simulaciones del Modelo de Black-choles

6.2.1. Precio de Opción

Este ejemplo muestra cómo calcular los precios de las opciones y las sensibilidades utilizando el modelo de precios de opciones de Black-Scholes. Considere una opción de compra y venta europea con un precio de ejercicio de $ 30 que vence el 1 de junio de 2020. La acción subyacente se cotiza a $ 30 el 1 de enero de 2020 y tiene una volatilidad del 30 % anual. La tasa libre de riesgo de capitalización continua anualizada es del 5 % anual. Con estos datos, calcule el delta, la gamma y el precio de las opciones utilizando el modelo de Black-Scholes.

```
AssetPrice = 30;
Strike = 30;
Sigma = .30;
Rates = 0.05;
Settle = 'January-01-2020';
Maturity = 'June -01-2020';

% define the RateSpec and StockSpec
RateSpec = intenvset('ValuationDate', Settle, 'StartDates', Settle, 'EndDates',...
Maturity, 'Rates', Rates, 'Compounding',-1, 'Basis', 1);

StockSpec = stockspec(Sigma, AssetPrice);

% define the options
OptSpec = {'call', 'put'};

OutSpec = {'Delta','Gamma','Price'};
[Delta, Gamma, Price] = optstocksensbybls(RateSpec, StockSpec, Settle,...
Maturity, OptSpec, Strike,'OutSpec', OutSpec)
```

Figura 6.2: Código para hallar el precio de las opciones

```
Delta =

    0.5810
   -0.4190


Gamma =

    0.0673
    0.0673


Price =

    2.6126
    1.9941
```

Figura 6.3: Imagen de Matlab. Resultado

Ejemplo 6.2.1. *Este ejemplo muestra cómo fijar el precio de las opciones sobre acciones europeas que vencen en tres meses con un precio de ejercicio de \$ 95. Suponga que la acción subyacente no paga dividendos, cotiza a \$ 100 y tiene una volatilidad del 50 % anual. La tasa libre de riesgo es del 10 % anual.*

```
[Call, Put] = blsprice(100, 95, 0.1, 0.25, 0.5)
```

Figura 6.4: Código en Matlab

```
Price =

    0.0639
```

Figura 6.5: Resultado

6.2.2. Volatilidad Implícita

Este ejemplo muestra cómo calcular la volatilidad implícita para una opción de compra europea que se cotiza a \$ 10 con un precio de ejercicio de \$ 95 y tres meses hasta el vencimiento. Suponga que la acción subyacente no paga dividendos y cotiza a \$ 100. La tasa libre de riesgo es del 7,5 % anual. Además, suponga que está interesado en volatilidades implícitas no superiores a 0,5 (50 % anual). En estas condiciones, las siguientes declaraciones calculan una volatilidad implícita de 0,3130, o 31,30 % anual.

```
Volatility = blsimpv(100, 95, 0.075, 0.25, 10, 0.5);
Volatility = blsimpv(100, 95, 0.075, 0.25, 10, 0.5, 0, [], {'Call'});
Volatility = blsimpv(100, 95, 0.075, 0.25, 10, 0.5, 0, [], true)
```

Figura 6.6: Código en Matlab, volatilidad de opciones

```
Volatility =

0.3130
```

Figura 6.7: Resultado de volatilidad

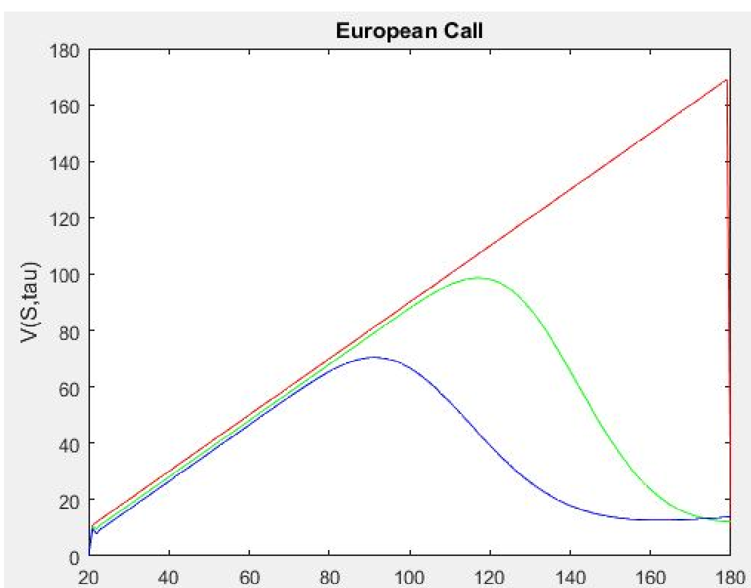


Figura 6.8: Distribución

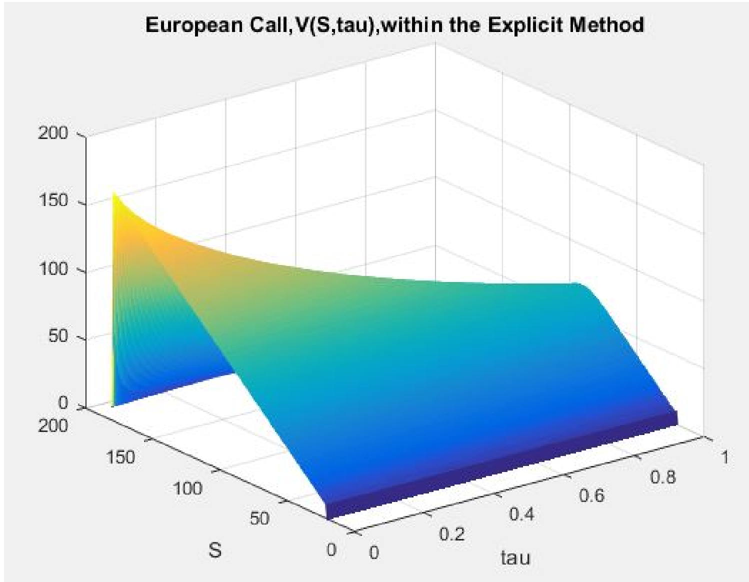


Figura 6.9: Distribución de volatilidad implicita en 3d

6.2.3. Movimiento Browniano Geométrico

Retomando el modelo del Movimiento Browniano Geométrico se analizará los comportamientos y variaciones que se realizara a la volatilidad y a la tasa promedio de crecimiento respeto a un inversionista de la bolsa.

$$X_t = x_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma z \sqrt{t}}$$

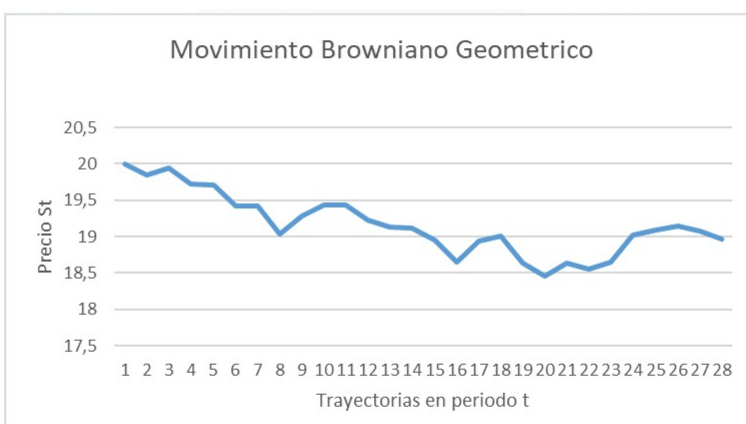


Figura 6.10: Movimiento Browniano Geométrico cuando $\mu < \sigma$

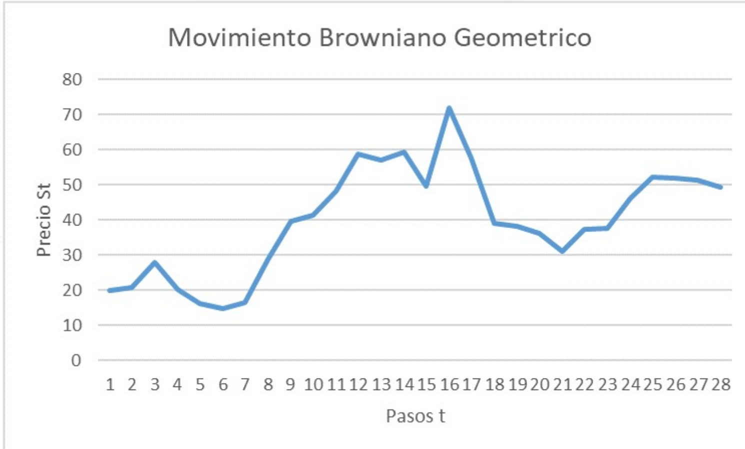


Figura 6.11: Movimiento Browniano Geométrico cuando $\mu < \sigma$

Análisis del Movimiento Browniano Geometrico

Se observo los movimientos Browniano Geométrico donde representa el precio de algún bien que fluctúa y haciendo las variaciones cuando $\mu < \sigma$ y $\mu > \sigma$ nos dio los siguientes resultados.

- Cuando $\mu < \sigma$ al transcurso del tiempo, tiene un comportamiento decreciente. Lo que se quiere decir, que el precio del bien cotizado disminuyo en la bolsa de valores.
- Cuando $\mu > \sigma$ al transcurso del tiempo, tiene un comportamiento exponencial. Lo que se quiere decir, que el precio del bien cotizado crece en la bolsa de valores.

6.3. Análisis y resultados

Observando nuestro proceso de discretización, permite transformar una ecuación diferencial parcial estocastica en ecuaciones en diferencias en un espacio-tiempo el cual se adapta bajo condiciones iniciales, en donde, haciendo uso a una herramienta importante, como lo es el software de Matlab podemos encontrar e ilustrar una aproximacion numerica. Se realizó 3 aplicaciones en diferentes situaciones del modelo de B-S, que son:

1. De acuerdo a la simulación 6.2, las variables **Delta** y **Gamma** fueron calculadas directamente a partir de los valores V_{jn}. Se realizo un pequeño cambio en la volatilidad y recalcular el valor de la derivada usando la misma grilla. Se obtiene los siguientes resultados: **Delta** en call es de 0.5810 y put -0.4190, **Gamma** Put de 0.0673 y 0.0673 y el precio call 2.6126 y put 1.9941.

2. Se fijo el precio de las opciones sobre las acciones europea. Donde su precio de ejercicio de \$95, la acción subyacente no paga dividendos, cotiza \$100, volatilidad del 50 % anual y tasa libre de riesgo 10 % anual. Donde el precio de las opciones es de \$101.39.

3. Se calculo la volatilidad implicita para la opción de compra europea que se citzo a \$10 con un precio de ejercicio de \$95 y tres meses hasta el vencimiento. Donde se obtuvo una volatilidad de 0.3130, esto implica que durante los tres meses se espera que los valores subyacente se mueva un 31.30 %.

6.4. Conclusiones

En este trabajo se encontró una solución númerica, a travez del método de diferencia finita a la ecuación diferencial estocasticas parcial de Black-Scholes (B-S). De acuerdo al lema de ito y el calculo estocastico se pudo deducir dicho modelo (B-S), el cual bajo supuestos, se pudo analizar junto a sus condiciones iniciales y de contorno, el proceso de discretización usando el método DF, para encontrar el valor subyacente de la opción de compra o venta. Es decír, resolviendo dicha ecuación diferencial en una ecuación en diferencia lo cual, dió como resultado una solución numérica de la ecuación diferencial cuando ΔS y ΔT tiende a cero.

Bibliografía

[1] LILIANA BLANCO CASTAÑEDA, *Probabilidad*, Primera edición,Universidad Nacional de colombia, Faculatad de ciencias, Bogotá D.C, 2004.

[2] JOHN C. HULL, *Introdución a los mercados de futuros y opciones*, sexta edición,Pearson, México,D.F,2009.

[3] WILMOTT,P.;HOWISON,S;DEWYNNE,J.- *The Mathematics of Financial Derivatives.*A student Introduction, Cambridge University Press, Cambridge,1995.

[4] THOMAS MIKOSCH, *Elementary Stochastic*, Vol.6,World Scientific Publishing, USA,2000.

[5] VANESSA JIMÉNEZ TERRADILLOS, *Métodos númericos para la valoración de opciones*, Trabajo de grado,Universidad de Valladolid,Faculadad de ciencias.

[6] WILLIAM F.AMES, *Numerical methods for partial differential equations*, Second edition, School of mathematics Georgia institute of technology, Atlanta,Georgia.

[7] JOSÉ LUIS BENITO CASTILLO, *El modelo de Black Sholes de valoración de opciones financieras*, Trabajo de grado, Universidad de Barcelona, Facultad de Matemáticas.

[8] MARGARITA PINZÓN CARDOZO y YIMMER CAMILO VARGAS FONSECA, *Método de descomposición de adomian para la valoración de opciones sobre procesos de reversión a la media*, Trabajo de grado, Universidad EAFIT, Departamento de ciencias basicas, 2012 , Medellín .

[9] Paul Wilmott y Sam Howison, *Método de descomposición de adomian para la valoración de opciones sobre procesos de reversión a la media*, Trabajo de grado, Universidad EAFIT, Departamento de ciencias basicas,2012, Medellín

[10] Marcela González, *El Modelo de Black and Scholes interpretación y aplicación práctica.*

[11] Carlos Héctor y Daniel Alliera, *Estudio y aplicaciones de Black Scholes,* Trabajo de grado, Universidad de Buenos Aires.

[12] Luis Rincón,Introducción a los procesos estocásticos, Departamento de Matemáticas, Facultad de ciencias UNAM.

[13] Daniel Hackmann, Solving the Black Scholes Equation using a Finite Difference Method, 2009.

[14] George Casella, Roger L. Berger, Statistical Inference, 2001.

[15] Solución Numérica de la Ecuación Diferencial de Black-Scholes, por Diferencia finita, haciendo uso de Scilab, Luis Fernado Plazas Galvez, *Facultad de Ingenieria,Unidad central del Valle del cauca.*

[16] Daniel Hackmann, Solving the Black Scholes Equation using a Finite Difference Method.

[17] Steven Kou, Management Science, Department of Industrial Engineering and Operations Research, Columbia University, New York, 2002.

[18] Freddy Marin, laura Guzman, Solucion Numerica del Modelo de Heston, Universidad EAFIT, Medellin, Colombia.

[19] jaime Villamil, Modelos de Valoracion de Opciones Europeos en Tiempo Continuo, UNAL, Bogota, 2006.

[20] Mónica Viviana Arango, Ricardo Alfredo Rojas Medina, Daniel Tabares Peralta, Univercidad de Manizales, Programa de contaduría Pública .

[21] Huang, J., Cen, Z., Zhao, J, An adaptive moving mesh method for a time-fractional Black–Scholes equation Open Access, Advances in Difference Equations 2019(1),516.

[22] Gao, X., Finite difference method for european option pricing with jump , Liaoning Gongcheng Jishu Daxue Xuebao (Ziran Kexue Ban)/Journal of Liaoning Technical University (Natural Science Edition) 38(4), pp. 381-384.