Nota de aceptación

Firma Asesor del Trabajo de Grado

Firma Segundo Lector

Firma Jefe de Programa

Enero

ACERCAMIENTO HISTORICO AL TRABAJO DE DIOFANTO

Por:
Sergio Andres Trujillo Tovar
Código 2005100493
Oscar Ignacio Martinez Trujillo
Código 2005102281

Universidad Surcolombiana
Facultad de Educación
Programa de Licenciatura en Matemáticas
Neiva (Huila)

2010

ACERCAMIENTO HISTORICO AL TRABAJO DE DIOFANTO

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Por:
Sergio Andres Trujillo Tovar
Código 2005100493
Oscar Ignacio Martinez Trujillo
Código 2005102281

Asesor:
Magister Ricardo Cedeño Tovar

Universidad Surcolombiana
Facultad de Educación
Programa de Licenciatura en Matemáticas
Neiva (Huila)

2010

"La creencia en el valor de la verdad científica no procede de la naturaleza, sino que es producto de determinadas culturas."

Max Weber

Índice general

1. Agradecimientos **6**

2. Introducción **7**

3. Justificación **8**

4. Objetivos **9**

5. Diofanto y su trabajo **10**
- 5.1. Diofanto de Alejandría 10
- 5.2. Reseña de su obra más representativa 12

6. La Aritmética **15**
- 6.1. Libro I 17
  - 6.1.1. Definiciones 17
- 6.2. Libro II 25
- 6.3. Libro III 32
- 6.4. Libro IV 37
- 6.5. Libro V 39
- 6.6. Libro VI 42

7. Conclusiones **45**

Capítulo 1

Agradecimientos

Agredecemos la asesoría brindada por el Mg. Ricardo Cedeño Tovar, actual jefe del programa Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana, por su paciencia y dedicación puesta de manifesto en la corrección de este trabajo. Al Mg. Augusto Silva Silva por sus valiosas sugerencias sobre la forma de presentación del material.

A mis compañeros futuros colegas que de una u otra forma aportaron con algunas sugerencias para la realización de este trabajo. A nuestros padres y hermanos que con su apoyo incondicional se ha logrado realizar la licenciatura en Matemáticas.

Capítulo 2
Introducción

Luego del gran florecimiento de la ciencia y de la matemática alejandrina del siglo III a.C., hubo un periodo de estancamiento hasta el siglo IV conocido como la edad de plata[1] (250 a 350 d.C.), cuando aparecen las grandes figuras de Diofanto y Pappus de Alejandría. No se sabe con exactitud cuándo vivió el primero de estos matemáticos, pero se asume que alrededor del año 250 d.C. La principal obra de él es *Aritmética*, en trece libros, de los cuales sobrevivieron sólo los seis primeros. La *Aritmética* no es una exposición sistemática de operaciones o funciones algebraicas o de la solución de ecuaciones algebraicas, sino una colección de problemas concebidos en términos de ejemplos numéricos específicos (no es un texto de álgebra, sino una colección de problemas de álgebra aplicada).

Una de las contribuciones importantes de Diofanto corresponde al campo de la notación. Los historiadores de la matemática distinguen tradicionalmente tres categorías en el desarrollo del álgebra:

a) palabras,

b) la etapa intermedia o sincopada, en la cual se utilizan algunas abreviaturas

c) la etapa final o simbólica.

El álgebra de Diofanto se ubica de plano en la segunda de estas etapas.

[1] La Edad de Plata es el nombre que se suele dar a un periodo histórico particular que se considera sucesor o emulador de una anterior Edad de Oro, aunque su valor sea inferior (como el de la plata frente al del oro).

Capítulo 3
Justificación

Este trabajo es realizado para conocer la vida y obra de uno de los primeros algebristas de la matemática, Diofanto de Alejandría; quien es el más grande algebrista griego. Poco se sabe de su vida, pero mucho de su obra. Resolvió problemas con ecuaciones algebraicas e inventó un formulismo particular. Su principal obra es la Aritmética, dedicada casi exclusivamente a la resolución exacta de ecuaciones determinadas e indeterminadas, de forma que la rama del análisis que se dedica a esta tarea se conoce hoy en día como Análisis Diofántico[1].

En Grecia, con el aporte de Diofanto se vuelve a la tradición de los calculistas Babilonios con su libro La Aritmética, el cual esta más cerca de la matemática Babilonica que de la geometria Griega. En esta obra, Diofanto ya no se preocupa por darle una representación geométrica a los números y por lo tanto está en mucha más libertad para desarrollar algunas reglas de cálculo simbólico. De hecho, introduce símbolos para representar la incógnita de un problema y desarrolla una notación que usa para abreviar potencias de números, relaciones y operaciones.

[1] Actualmente, el análisis diofántico es el área de estudio donde se buscan soluciones enteras para las ecuaciones.

Capítulo 4
Objetivos

Objetivo general

Con el presente trabajo de grado se pretende hacer un acercamiento al trabajo de Diofanto con el fin de conocer cuál fue su trascendencia en la notación matemática actual desde su origen y su evolución, teniendo en cuenta los matemáticos que más incidencia tuvieron en el desarrollo de su trabajo algebraico.

Objetivos específicos

1. Investigar y entender la notación utilizada por Diofanto, con la cual describió expresiones y operaciones algebraicas.

2. Explicar la influencia que ejercieron algunos matemáticos de la época de Diofanto en la solución general de diversos problemas planteados en su trabajo *La Aritmética*.

3. Resaltar la imaginación y la habilidad de Diofanto en el planteamiento y solución de problemas en su libro *La Aritmética*

Capítulo 5
Diofanto y su trabajo

5.1. Diofanto de Alejandría

Poco se conoce sobre la vida de **Diofanto**. Las investigaciones más creibles lo sitúan hacia la segunda mitad del siglo III, siendo contemporáneo de Pappus[1].

Es clásico el epitafio en la Antología de Metrodoro, dice: *"Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto; Es él quien con esta sorprendente distribución dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte, su mejilla se cubrió con el primer beso. Pasó aún una séptima parte antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzado la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años más, mitigando su dolor con investigaciones sobre la ciencia de los números"*. Con nuestra notación moderna y el uso del algebra, es bastante fácil ver que si Diofanto vivió durante años x, entonces el problema es equivalente a la solución de la ecuación $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$, que tiene la solución $x=84$

La mejor evidencia sobre la época en que vivió nos la ofrece los trabajos que citan y los que le citan. Así, en su libro sobre números poligonales Diofanto presenta la definición dada por el matemático griego Hipsicles a mediados del siglo II a.C. Por otro lado, el matemático alejandrino Teón lo menciona en un trabajo de mediados del siglo IV d.C. Los historiadores sitúan a Diofanto a mediados del siglo III d.C. basándose en una carta de Michaell Psellus[2], un gobernante y matemático bizantino del siglo XI,

[1](ss. III-IV) Matemático griego. Último gran matemático de la escuela alejandrina, escribió comentarios a los Elementos de Euclides y a la Gran sintaxis matemática de Tolomeo, llamada Almagesto por los árabes.

[2]Fue un historiador bizantino y su trabajo es especialmente útil para los detalles de la decadencia

quien afirma que hacia el año 270 Anatolio, obispo de Laodicea, había dedicado un tratado sobre el antiguo cálculo egipcio a su amigo Diofanto de Alejandría.

De él han llegado hasta nosotros los números poligonales (o *Numeris Multangulis*), *Porismas* (que se cree formaba parte de la *Aritmética*), sobre los números fraccionarios y naturalmente *La Aritmética*, que fue un tratado de 13 libros del que sólo se conocen los seis primeros. Fue encontrada en Venecia por Johann Müller (Matemático y Astrónomo alemán) hacia 1464 y la primera traducción latina pertenece a Wilhelm Holzmann (1532-1576) *Diophanti Alexandrini Rerum libri sex*, Basilea, 1575. En 1621 aparece la edición de Bachet de Méziriac[3] con el siguiente título: *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex; et de Numeris multangulis liber unus. Nunc primun graece et latini editi atque absolutissimis commentariis illustrati*, Paris 1621 (que contiene además del texto griego y la traducción latina con aclaraciones y notas).

Probablemente, Diofanto dedicó su obra al que fuera obispo de Alejandría entre los años 247 y 264. Alejandría se habia vuelto el centro de la cultura Helenística[4] poco después de que Alejandro Magno la fundara, allá en el 331 a.C. En torno al siglo III d.C., la ciudad era a menudo escenario de conflictos entre la creciente comunidad cristiana y las comunidades griega y romana ya establecidas. A principios del 260, sin embargo, la persecución de la comunidad cristiana estaba a la orden del día. Con este telón de fondo cabe, pues, preguntarse si la amistad entre Diofanto y Dionisio (obispo de Alejandría) implíca que Diofanto era cristiano.

La primera mujer matemática de la historia occidental, Hipatia[5], la hija de Teón de Alejandría, escribio el primer comentario sobre la *Aritmética*. Póco se sabe de ella, más alla que fué asesinada por un grupo de cristianos fanáticos en el año 415,

del imperio bizantino en las décadas anteriores a las cruzadas.

[3]Claude Gaspard Bachet de Méziriac(9 de octubre de 1581-26 de febrero de 1638) fue un matemático frances que analizó la solución de ecuaciones indeterminadas mediante fracciones continuas. También trabajo en la teoria de números, y encontró un método para la construcción de cuadrados mágicos.

[4]El esplendor cultural del periodo Helenistico se debe a la expansión enorme de la cultura escrita (el periodo clásico ateniense fue la primera etapa gráfica para la cultura literaria y científica, a partir de la adaptación jónico-ática en Atenas).

[5]El nombre de Hipatia significa la más grande. La leyenda de Hipatia de Alejandría nos muestra a una joven, virgen y bella, matemática y filósofa, cuya muerte violenta marca un punto de inflexión entre la cultura del razonamiento griego y el oscurantismo del mundo medieval. Como ocurre con todas las biografías de los matemáticos (y matemáticas) de la antigedad, se sabe muy poco de su vida, y de su obra se conoce sólo una pequeña parte.

en coincidencia con la quema de la gran biblioteca de Alejandría y la consiguiente desaparición de la colección de pensamiento clásico más importante del mundo.

En Occidente, la *Aritmética* sobreviviría a la destrucción de la biblioteca de Alejandría gracias al manuscrito que copiara en constantinopla Michaell Psellus. Este manuscrito es el progenitor de todas la versiones de la *Aritmética* conocidas hasta hace unos 30 años.

5.2. Reseña de su obra más representativa

En la *Aritmética*, Diofanto plantea y resuelve, de unas cincuenta maneras diferentes, 290 problemas[6]. Los enunciados son generales aunque, debido a las limitaciones lexicográficas, el autor introduce números concretos (racionales y enteros positivos) para llevar a cabo sus razonamientos. La *Aritmética* de Diofanto se aleja de la logística numérica, término con el que Platón caracterizaba la práctica convencional del cálculo y la computación, tan útiles en el desarrollo de la actividad comercial; pero también difiere de la aritmética teórica presentada por Euclides en los Elementos. Diofanto intenta teorizar el cálculo confiriéndole un fundamento abstracto. Su objetivo consiste en descubrir las relaciones existentes entre los números, ya sean éstos lineales, cuadrados, cúbicos, bicuadrados, cuadrado-cúbicos o cubo-cúbicos. Creó un lenguaje exclusivo para la aritmética, con un signo para designar las sucesivas incógnitas. Cada potencia también posee su propio grafema[7]. Establece igualdades y desigualdades, e intenta reducirlas al máximo mediante la aplicación de dos reglas; así obtiene la expresión más simple: la igualdad en la que una especie (son cierta clase de números) es igual a una especie y, de ahí, la solución requerida. Ambos procedimientos de sustraer lo similar y añadir lo que falta son análogos a los propuestos por Al-Jwarizmi.

En la *Aritmética* se definen por primera vez las ecuaciones de segundo grado (aquellas en las que dos especies son iguales a una especie) y se muestra un algoritmo aritmético para resolverlas; aunque Diofanto no estaba muy seguro del mismo y lo aplicó en pocos casos y de manera limitada.

Resulta extremadamente asombrosa su capacidad de encontrar la expresión adecuada con la cual identifica los datos de un problema. Y aquí reside precisamente lo

[6]Estos 290 problemas corresponden a la obra completa de Diofanto, es decir, a los 13 libros.
[7]Unidad mínima e indivisible de la escritura en una lengua.

más sorprendente de su método, o la ausencia de él, como frecuentemente se le ha criticado. No hay una regla general con la que se puedan abordar todos los ejercicios; cada uno de ellos precisa un tratamiento específico.

La *Aritmética* de Diofanto tiene ciertas peculiaridades: no es un tratado de teoría de números, como son los libros VII a IX de los Elementos de Euclides, en los que ninguna cantidad concreta aparece; tampoco se trata de una logística numérica, según había denominado Platón al arte de realizar cálculos con números enteros o racionales; es más bien una obra de logística teórica, pues los números que intervienen aquí son considerados como especies, aunque (debido a la falta de simbolismo) Diofanto utiliza números concretos para llevar a cabo sus razonamientos.

En la *Aritmética*, Diofanto define por primera vez las ecuaciones de segundo grado: *igualdades en las que dos especies son iguales a una especie* $[ax^2 \pm bx = c]$; distinguiéndolas de otras mucho más simples, en las que *una especie es igual a una especie* $[ax^n = bx^m]$ Su estrategia $(\mathbf{o}|\mathbf{do}|\varsigma)$ consistirá en trasladar al *lenguaje teórico* el enunciado y los datos del problema, estableciendo una igualdad de carácter general. Dispone además de un conjunto de herramientas sintácticas y morfológicas con las que maniobra hasta obtener una expresión más simple y la esperada solución. El lenguaje de la aritmética (distinto al utilizado para enunciar los problemas) se compone de signos y palabras abreviadas. Llama *aritmos* ($\acute{\alpha}\varrho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$) al número desconocido, formado por una cantidad indeterminada de unidades, y lo identifica siempre con el mismo signo: ς. Cuando introduce nuevas incógnitas, utiliza la misma letra, lo cual dificulta mucho la comprensión del texto. El término independiente se expresa mediante la unidad o M$\acute{o}\nu\acute{\alpha}\varsigma$, $\mathring{M}$, seguido de un número[8]. El cuadrado ($\tau\varepsilon\tau\varrho\acute{\alpha}\gamma\omega\varsigma$) es el número multiplicado por sí mismo; trasladado al lenguaje aritmético, toma el nombre de *potencia*; el lado del cuadrado ($\pi\lambda\varepsilon\nu\varrho\acute{\alpha}$ $\tau o\acute{\nu}$ $\tau\varepsilon\tau\varrho\acute{\alpha}\gamma\omega\varsigma$), es el número que se identifica con la incógnita.

Hay otros números compuestos: el cubo, formado por el producto de un número cuadrado por su lado. Se llama cuadrado-cuadrado al número cuadrado multiplicado por sí mismo. Cuadrado-cubo es el resultado de multiplicar un número cuadrado por el cubo del mismo lado. Cubo-cubo es el número formado por el producto de dos números cúbicos. Cuando todos estos números entran a formar parte de la teoría aritmética se escriben de modo abreviado: $\mathbf{\Delta^U}, \mathbf{K^U}, \mathbf{\Delta^U\Delta}, \mathbf{\Delta K^U}, \mathbf{K^U K}$. Diofanto también describe los inversos de estos números y las operaciones realizadas con ellos. Asimismo, define los productos con cantidades *de distinto signo*: "lo que falta

[8]Como sabemos, los griegos utilizaban las letras de su alfabeto para designar los números

multiplicado por lo que falta, nos da lo que es; mientras lo que falta multiplicado por lo que es nos da lo que falta". El autor agrupa los números que sustraen detrás de un símbolo específico, colocando antes todas las magnitudes positivas[9].

Los enunciados de los problemas suelen proponer una condición general e indeterminada que Diofanto necesita concretar. Para ello, busca una expresión manejable escrita en función de la incógnita con la cual compone su primera igualdad. Una vez establecida ésta, finaliza el proceso de invención. Después, elimina de esa igualdad los términos negativos y agrupa los de la misma especie[10], hasta obtener la expresión que le conduce al resultado. A veces, necesita introducir valores falsos y magnitudes auxiliares, con la intención de proseguir su razonamiento. La estrategia de operar con cantidades supuestas (o método de falsa posición) proviene de las matemáticas babilónicas y egipcias.

[9]Esta información será ampliada cuando se hable del libro I de la *Aritmética* de Diofanto

[10]Ambas reglas las conocemos con el nombre de *restauración y oposición*, desde que Al-Jwarizmi las enunció en su *Kitab al-jabr wa'l-muqabala* (aprox. 830 d.C.). Diofanto las describe en la introducción del libro I.

Capítulo 6
La Aritmética

la *Aritmética* fue traducida al árabe por Qustá ibn Lúgá a mediados de la segunda mitad del siglo IX. De las ediciones modernas, una de las más famosas fue la de Bachet (1621) que publicó por primera vez el texto griego en traducción latina; ésta fue la famosa edición utilizada por Fermat para dejar en ella anunciada su misteriosa "demostración" de su teorema o conjetura. La edición estandar hoy día de las obras de Diofanto es la de Tannery en dos volumenes (Teubner, 1893, 1895).

La originalidad de Diofanto en esta obra tiene un doble aspecto. El primero consiste en que se trata del único matemático griego (excluyendo quizás a los primeros pitagóricos) que no es un "geómetra", sino un "aritmético" en estado puro. Los problemas son todos de "teoria de números", incluso los que estan disfrazados por un lenguaje aparentemente geométrico ("Hallar un triángulo rectángulo tal que. . ."). Como es bien sabido, a partir del descubrimiento de los segmentos inconmensurables, con la consecuencia de que los números no podían dar cuenta del continuo, la geometria pura se independizó de la aritmética y se convirtió en la auténtica reina de la matemática griega, dominándola practicamente toda.

Otra de las novedades importantes que introduce Diofanto es la siguiente, los objetos propios de la aritmética griega eran los números naturales y sus razones, que no eran números sino relaciones entre números ("en cuanto al tamaño", nos diría Euclides). Diofanto considera por primera vez a los números fraccionarios (positivos solamente, por supuesto) como auténticos números. Hay que recordar que la "manipulación" por parte de los egipcios y mesopotamios de los "números fraccionarios" en un sentido puramente "partitivo" (que sin duda es el mejor método de introducirlos a los niños), no tiene nada que ver con la matemática pura griega. Por otra parte, el reconocimiento pleno de los números racionales con su independencia "ontológica", hubo de esperar hasta el siglo XVII. El punto de vista en el que se situa Diofanto le permite en primer lugar librarse de las limitaciones dimensionales de la geometría, donde sólo se podían "multiplicar" tres magnitudes, puesto que tres es la dimensión del espacio. Diofanto admite sin ningún problema productos y potencias hasta seis factores y sus inversos.

El segundo aspecto innovador de Diofanto, tan importante al menos como el primero, fue su introducción del primer simbolismo propiamente matemático. La matemática griega habia carecido de cualquier tipo de simbolismo especial: era una matemática "retórica". Diofanto introduce un simbolismo adaptado al cálculo algebraico muy flexible. Esta notación Diofántica recibió el nombre de notación "sincopada" y, pese a su indudables ventajas "algebraicas", se perdió inmediatamente después de Diofanto, al parecer, y ya ni siquiera la recuperaría la matemática árabe. Sólo durante el Renacimiento, desde finales del siglo XV hasta bien entrado el siglo XVII, se volverá a introducir, lenta y trabajosamente la nueva notación algebraica, que culminará en 1637 con la de Descartes, que es ya la nuestra. Es muy educativo repasar algunos de los muchícimos intentos fallidos de construir una notación flexible para el cálculo algebraico. Se trata de hecho que tuvo una enorme importancia en la evolución de toda la matemática posterior al siglo XVII, en lo que suele llamarse el proceso de "algebrización" de la matemática.

En el gráfico puede verse una edición realizada por Fermat hijo (sobre la traducción de Bachet) que incluye impresas las anotaciones de su padre.

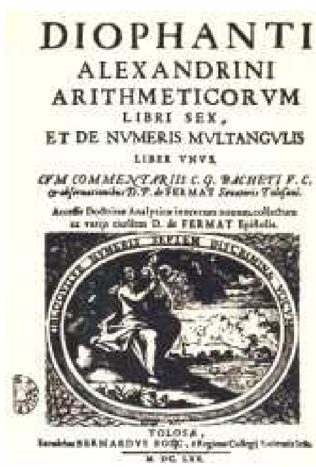


Figura 6.1: Portada del libro la *Aritmética*

La *Aritmética* no es propiamente un texto de álgebra sino una colección de 150 problemas[1]. No se sabe cuantos de ellos son originales o tomados de otros tratados de la época; Diofanto presenta en todos ellos una solución única y no establece distinción entre problemas determinados e indeterminados. Tampoco existe ningún orden en cuanto a la naturaleza de los problemas o los métodos de resolución.

6.1. Libro I

Contiene 25 problemas de primer grado y 14 de segundo.

Dedicatoria
"Como sé, muy honorable Dionisio, que quieres aprender a resolver problemas numéricos, he emprendido la tarea de exponer la naturaleza y el poder de los números, empezando por las bases que sustentan estas cuestiones. Es posible que parezcan más difíciles de lo que son por ser desconocidas aún y que los principiantes duden de conseguir alcanzarlas, pero las comprenderás fácilmente gracias a tu actividad y a mis demostraciones, pues que el deseo unido a la enseñanza conduce rápidamente al conocimiento".

6.1.1. Definiciones

Algunas definiciones previas del libro I de Diofanto son:

- (x^2) Un cuadrado, cuyo signo es Δ con una Y superpuesta: Δ^Y
- (x^3) Un cubo, cuyo signo es K^Y.
- (x^4) Un cuadrado al cuadrado, cuyo signo es $\Delta^Y\Delta$
- (x^5) Un cuadrado cubico, cuyo signo es ΔK^Y
- (x^6) Un cubo al cubo, con el signo K^YK

Pero el número que no tiene ninguna de estas características, sino que solo contiene en si una multitud indeterminada de unidades se llama *aritmos*, y su signo es ς. Esta letra (es una variante de la letra griega sigma) es utilizada por Diofanto para representar la incógnita, que él describe literalmente como "el número", hoy en día la letra para representar variables es la x. Y hay también otro signo que denota una

[1]Estos 150 problemas corresponden sólo a los 6 libros encontrados.

constante el cual es una M con un circulo superpuesto así $\mathring{M}$

Diofanto fue el primer matemático en introducir el signo para sustracción que era similar a:

$$\pitchfork$$

Para Diofanto, los números positivos representan una "presencia", y términos negativos una "falta". Los positivos siempre aparecen antes que los negativos en sus problemas. Diofanto ofrece algunas reglas para la multiplicación que son:

- Un menos multiplicado por menos hace un más (una "falta" por una "falta" produce una "presencia")
- Un menos multiplicado por un más hace un menos (una "falta" por una "presencia" produce una "falta")
- Un más multiplicado por un más produce un más (una "presencia" por una "presencia" produce una "presencia")

Diofanto nunca uso un símbolo para la adición, simplemente yuxtaponía los términos para representarla, para la multiplicación tampoco uso simbolismos porque usaba coeficientes enteros o fraccionarios, es así como aparecen expresiones como la siguiente:

$$K^{\Upsilon}\alpha\varsigma\beta \pitchfork \mathring{M}\gamma$$

Figura 6.2: Escritura de Diofanto

La cual significa:

$$x^3 + 2x - 3$$

También consideraba que una cantidad negativa simplemente no podría existir sin alguna cantidad positiva de la cual pudiera ser sustraída. Para él una ecuación que llevara una cantidad negativa era innecesaria, como lo eran las soluciones irracionales o imaginarias.

Diofanto concluye explicando que en el arreglo de todo su material, trato de distinguir los diferentes tipos de problemas, sobre todo en la parte elemental al principio, para hacer sencillo lo más complicado, haciendo que el curso que el creo con sus ecuaciones sean fáciles para el aprendiz y todos sus métodos sean aprendidos. Su trabajo se basa en trece libros[2].

1. *Problema 1.* Forma General: Dividir un número en dos partes conociendo la diferencia entre ellos. Sea c el número dado y x e y las partes en las que se va a dividir el número dado.
   Por lo tanto
   $$x + y = c \tag{6.1}$$
   y su diferencia es d, es decir,
   $$x - y = d \tag{6.2}$$
   Sumando (5.1) con (5.2) obtenemos la solución para x:
   $$2x = c + d$$
   $$\boxed{x = \frac{c+d}{2}} \tag{6.3}$$
   ahora restamos (5.2) de (5.1) y obtenemos la solución para y:
   $$2y = c - d$$
   $$\boxed{y = \frac{c-d}{2}} \tag{6.4}$$
   Caso particular del problema 1 planteado por Diofanto. Dividir el número 100 en dos partes cuya diferencia es 40.
   Solución: tenemos que $c = 100$ y $d = 40$, reemplazando en (5.3) obtenemos:
   $$x = \frac{100 + 40}{2}$$
   $$x = 70$$
   reemplazando en (5.4)
   $$y = \frac{100 - 40}{2}$$
   $$y = 30$$
   La solución es $x = 70$ y $y = 30$

[2] De los cuales haremos una breve reseña de los 6 primeros

Solución particular dada por Diofanto. El menor de los números requeridos es x.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} y - x &= 40 \\ y + x &= 100 \\ x + (40 + x) &= 100 \\ 2x + 40 &= 100 \\ 2x &= 60 \\ x &= \frac{60}{2} \\ x &= 30 \end{aligned}$$

Los números requeridos son 70 y 30.

2. *Problema 2.* Forma General: Dividir un número en dos partes, teniendo una razón.
   Sean: c el número; r la razón, además x y y las partes en las que se va a dividir c. Por lo tanto obtenemos

   $$c = x + y, \quad \text{donde, } \frac{y}{x} = r, \text{ así que } c = x + rx = (1 + r)x,$$

   tenemos

   $$\boxed{x = \frac{c}{1 + r}} \tag{6.5}$$

   como $y = rx$, entonces

   $$\boxed{y = \frac{rc}{1 + r}} \tag{6.6}$$

   Caso particular del problema 2 planteado por Diofanto. Dividir el número 60 en dos partes cuya razón es $\frac{3}{1}$.
   Solución: tenemos que $c = 60$ y $r = 3$, reemplazando en (5.5) obtenemos

   $$\begin{aligned} x &= \frac{60}{1 + 3} \\ x &= \frac{60}{4} \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Luego:

$$y = \frac{60 \cdot 3}{1+3}$$
$$y = \frac{180}{4}$$
$$x = 45$$

La solución es $x = 15$, y, $y = 45$

Solución particular dada por Diofanto. Sea x el primer número y $3x$ el segundo número, entonces:

$$x + 3x = 60$$
$$4x = 60$$
$$x = \frac{60}{4}$$
$$x = 15$$

Por lo tanto $x = 15$, luego los números son 15 y 45.

3. *Problema 16.* Forma general: Encontrar tres números dadas las sumas de cada par de ellos.
   Sean n_1, n_2, n_3 las respectivas sumas dadas de cada par y x, y y z los números a encontrar.
   Por lo tanto:

$$x + y = n_1 \tag{6.7}$$
$$y + z = n_2 \tag{6.8}$$
$$x + z = n_3 \tag{6.9}$$

sumando (5.7), (5.8) y (5.9) obtenemos

$$2x + 2y + 2z = n_1 + n_2 + n_3$$

así que

$$x + y + z = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{2}$$

pero $x + y = n_1$; por lo tanto

$$z = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{2} - n_1$$

$$\boxed{z = \frac{n_2 + n_3 - n_1}{2}} \tag{6.10}$$

de igual forma $y + z = n_2$; lo cual implica que

$$x = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{2} - n_2$$

$$\boxed{x = \frac{n_1 + n_3 - n_2}{2}} \tag{6.11}$$

También se tiene que $x + z = n_3$; lo que nos lleva a

$$y = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{2} - n_3$$

$$\boxed{y = \frac{n_1 + n_2 - n_3}{2}} \tag{6.12}$$

Caso particular del problema 16 planteado por Diofanto. Encontrar tres números tal que las sumas de cada par sean 20, 30 y 40 respectivamente.
Solución: tenemos que $n_1 = 20$, $n_2 = 30$ y $n_3 = 40$, reemplazando en (5.10) obtenemos

$$z = \frac{30 + 40 - 20}{2}$$

$$z = \frac{50}{2}$$

$$z = 25$$

reemplazando en (5.11)

$$x = \frac{20 + 40 - 30}{2}$$

$$x = \frac{30}{2}$$

$$x = 15$$

y reemplazando en (5.12)

$$y = \frac{20 + 30 - 40}{2}$$

$$y = \frac{10}{2}$$

$$y = 5$$

por lo tanto las soluciones son 15, 5 y 25.

Solución particular dada por Diofanto. Sean los números: a, b, c tales que $a+b = 20, b+c = 30, a+c = 40$ y x es la suma de los tres números. **Condición necesaria**: la mitad de la suma de los tres números dados debe ser mayor que cualquiera de ellos[3].
Por lo tanto los números son:
$(x - 20)$ Tercer número,
$(x - 30)$ Primer número,
$(x - 40)$ Segundo número,
La suma quedaría representada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
x &= (x - 30) + (x - 40) + (x - 20) \\
x &= x - 30 + x - 40 + x - 20 \\
x &= 3x - 90 \\
0 &= 2x - 90
\end{aligned}$$

por lo tanto x debe ser igual a 45, luego los números son 15, 5 y 25 respectivamente[4].

4. *Problema 17.* Forma general: Encontrar cuatro números dadas las sumas de todos los juegos de tres. Sean n_1, n_2, n_3, n_4 las respectivas sumas dadas de cada juego de tres y w, x, y y z los números a encontrar.
   Por lo tanto:
   $$w + x + y = n_1 \tag{6.13}$$
   $$w + x + z = n_2 \tag{6.14}$$
   $$w + y + z = n_3 \tag{6.15}$$
   $$x + y + z = n_4 \tag{6.16}$$
   Sumando (5.13), (5.14), (5.15) y (5.16) obtenemos.
   $$3w + 3x + 3y + 3z = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$$
   Así que
   $$w + x + y + z = \frac{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}{3}$$
   Pero como $w + x + y = n_1$; tenemos que
   $$z = \frac{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}{3} - n_1$$

[3] Para evitar tener números negativos
[4] En Grecia era muy común usar el método de la balanza para solucionar este tipo de ecuaciones.

$$\boxed{z = \frac{n_2 + n_3 + n_4 - 2n_1}{3}} \tag{6.17}$$

también $w + x + z = n_2$; así que

$$y = \frac{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}{3} - n_2$$

$$\boxed{y = \frac{n_1 + n_3 + n_4 - 2n_2}{3}} \tag{6.18}$$

De igual forma $w + y + z = n_3$; lo cual implica que

$$x = \frac{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}{3} - n_3$$

$$\boxed{x = \frac{n_1 + n_2 + n_4 - 2n_3}{3}} \tag{6.19}$$

También se tiene que $x + y + z = n_4$; lo que nos lleva a

$$w = \frac{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}{3} - n_4$$

$$\boxed{w = \frac{n_1 + n_2 + n_3 - 2n_4}{3}} \tag{6.20}$$

Caso particular del problema 17 planteado por Diofanto. Encontrar cuatro números tal que las sumas de cada juego de tres sean 22, 24, 27 y 20 respectivamente.
Solución: sean $n_1 = 22$, $n_2 = 24$, $n_3 = 27$, $n_4 = 20$ y x, y, z, w los números desconocidos, ahora reemplazando en (5.17) obtenemos

$$z = \frac{24 + 27 + 20 - 2(22)}{3}$$
$$z = \frac{27}{3}$$
$$z = 9$$

Reemplazando en (5.18)

$$y = \frac{22 + 27 + 20 - 2(24)}{3}$$
$$y = \frac{21}{3}$$
$$y = 7$$

Reemplazando en (5.19)

$$\begin{aligned} x &= \frac{22+24+20-2(27)}{3} \\ x &= \frac{12}{3} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Reemplazando en (5.20)

$$\begin{aligned} w &= \frac{22+24+27-2(20)}{3} \\ w &= \frac{33}{3} \\ w &= 11 \end{aligned}$$

Por lo tanto los números son: 9, 7, 4 y 11

Solución particular dada por Diofanto. **Condición necesaria**: un tercio de la suma de los cuatro debe ser mayor que cualquiera de ellos.
x es la suma de los cuatro. Por lo tanto los números son $x-22$; $x-24$; $x-27$ y $x-20$, luego

$$4x - 93 = x, \text{ de donde, } x = 31$$

Y los números son 9, 7, 4 y 11.

6.2. Libro II

Consta de 35 problemas. El problema 8, sin duda es el más famoso, dió lugar al llamado "Teorema de Fermat"

1. *Problema 6.* Forma general: Encontrar dos números que tienen una diferencia dada y que la diferencia de sus cuadrados exceda su diferencia por un número dado.
   Sea x el primer número, y el segundo número siendo $y > x$, por lo tanto la diferencia quedaria:

   $$y - x = a \quad \text{de donde } y = x + a$$

   y la diferencia de sus cuadrados es:

   $$(x+a)^2 - x^2 = d \quad \text{donde } d = a + c \text{ siendo } c \text{ el número dado (el exceso)}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}
(x+a)^2 - x^2 &= a + c \\
\cancel{x}^2 + 2ax + a^2 - \cancel{x}^2 &= a + c \\
2ax &= a - a^2 + c
\end{aligned}$$

$$\boxed{x = \frac{a + c - a^2}{2a}} \tag{6.21}$$

y como $y = x + a$, entonces

$$y = \frac{a + c - a^2}{2a} + a$$

$$\boxed{y = \frac{a + c + a^2}{2a}} \tag{6.22}$$

Caso particular del problema 6 planteado por Diofanto. Encontrar dos números cuya diferencia es 2 y la diferencia de sus cuadrados excede a su diferencia en 20.
Solución: tenemos que $a = 2$ y $c = 20$, reemplazando en (5.21) obtenemos

$$\begin{aligned}
x &= \frac{2 + 20 - 2^2}{2(2)} \\
x &= \frac{18}{4} \\
x &= 4\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

y reemplazando en (5.22)

$$\begin{aligned}
y &= \frac{2 + 20 + 2^2}{2(2)} \\
y &= \frac{26}{4} \\
y &= 6\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

los números son $4\frac{1}{2}$ y $6\frac{1}{2}$

Solución particular dada por Diofanto. **Condición necesaria**: El cuadrado de su diferencia debe ser menor que la suma de dicha diferencia y el exceso dado de la diferencia de los cuadrados sobre la diferencia de los números.

Sean x el menor de los números y y el mayor de ellos. La diferencia entre los números es $y - x = 2$, es decir $y = x + 2$, entonces

$$
\begin{aligned}
y^2 - x^2 &= 22 \\
(x+2)^2 - x^2 &= 22 \\
\cancel{x^2} + 4x + 4 - \cancel{x^2} &= 22 \\
4x + 4 &= 22 \\
x &= \frac{18}{4} \\
x &= 4\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

En consecuencia $x = 4\frac{1}{2}$; luego los números son $4\frac{1}{2}$ y $6\frac{1}{2}$.

2. *Problema 7.* Encontrar dos números tal que la diferencia de sus cuadrados exceda por un número dado a la proporción dada a su diferencia.
   Sea r la proporcion y x el primer número, y el segundo número siendo $y > x$, por lo tanto la diferencia es:

$$y - x = a \quad \text{donde } y = x + a$$

La diferencia de sus cuadrados es:

$$(x+a)^2 - x^2 = d \quad \text{donde } d = c + ar, \text{ siendo } c \text{ el número dado}$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
(x+a)^2 - x^2 &= c + ar \\
\cancel{x^2} + 2ax + a^2 - \cancel{x^2} &= c + ar \\
2ax &= c + ar - a^2
\end{aligned}
$$

$$\boxed{x = \frac{c + ar - a^2}{2a}} \tag{6.23}$$

y como $y = x + a$ entonces

$$y = \frac{c + ar - a^2}{2a} + a$$

$$\boxed{y = \frac{c + ar + a^2}{2a}} \tag{6.24}$$

Caso particular del problema 7 planteado por Diofanto. Proporción dada 3 : 1; el número dado es 10, y la diferencia dada de los número es 2; hallar los números. Solución: tenemos que $a = 2$, $r = 3$ y $c = 10$, reemplazando en (5.23) obtenemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{10 + 2(3) - 2^2}{2(2)} \\ x &= \frac{12}{4} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Reemplazando en (5.24) obtenemos

$$\begin{aligned} y &= \frac{10 + 2(3) + 2^2}{2(2)} \\ y &= \frac{20}{4} \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Los números son 3 y 5.

Solución particular dada por Diofanto. **Condición necesaria**: el cuadrado de la diferencia de los números debe ser menor que la suma de 3 veces la diferencia y el número dado.
Sea x el número menor, por lo tanto el número mayor debe ser $x+2$; entonces:

$$4x + 4 = 3 \cdot 2 + 10$$

Luego $x = 3$, y en consecuencia los números son 3 y 5.

3. *Problema 8.* Dividir un número cuadrado en dos cuadrados.

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + y^2 \\ z^2 &= x^2 + (z^2 - x^2) \;\text{ con }\; y^2 = z^2 - x^2 \end{aligned}$$

Sea $y = mx - z$. Hagamos

$$z^2 - x^2 = y^2 = (mx - z)^2 = m^2x^2 - 2mxz + z^2$$

Así que

$$\cancel{z}^2 - x^2 = m^2x^2 - 2mxz + \cancel{z}^2$$

Entonces

$$m^2x^2 + x^2 - 2mxz = 0 \quad ; x \neq 0$$
$$(m^2+1)x = 2mz$$
$$\boxed{x = \frac{2mz}{m^2+1}} \tag{6.25}$$

Pero como $y^2 = z^2 - x^2$ tenemos que

$$y^2 = z^2 - \left(\frac{2mz}{m^2+1}\right)^2 = z^2\left(1 - \frac{4m^2}{(m^2+1)^2}\right)$$

$$= z^2\left(\frac{m^4 + 2m^2 + 1 - 4m^2}{(m^2+1)^2}\right) = \frac{z^2(m^2-1)^2}{(m^2+1)^2}$$

De aquí

$$\boxed{y = \frac{z(m^2-1)}{m^2+1}} \tag{6.26}$$

Verificación:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{2m}{m^2+1}\right)^2 z^2 + \left(\frac{(m^2-1)}{m^2+1}\right)^2 z^2$$

$$= \left[\frac{4m^2}{(m^2+1)^2} + \frac{m^4 - 2m^2 + 1}{(m^2+1)^2}\right] z^2 = \frac{(m^2+1)^2}{(m^2+1)^2} z^2 = z^2$$

Así hemos obtenido una manera general de calcular dichos números.

Caso particular del problema 8 planteado por Diofanto. Sea $z^2 = 16 \quad (z = 4)$ el número cuadrado, tomando $m = 1$ y reemplazando en (5.25) y (5.26) respectivamente obtenemos

$$x = \frac{2(1)4}{1^2+1} = \frac{8}{2} = 4; \quad y = \frac{(1^2-1)4}{1^2+1} = 0$$

Esto significa que $x^2 = 16, y^2 = 0$, por lo tanto

$$x^2 + y^2 = 4^2 + 0^2 = 16$$

Tomando $m = 2$ y reemplazando en (5.25) y (5.26) obtenemos

$$x = \frac{2(2)4}{2^2+1} = \frac{16}{5}; \quad y = \frac{(2^2-1)4}{2^2+1} = \frac{12}{5}$$

Entonces $x^2 = \frac{256}{25}, y^2 = \frac{144}{25}$, así que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{256}{25} + \frac{144}{25} \\ &= \frac{400}{25} = 16 \end{aligned}$$

Tomando $m = 3$ y reemplazando en (5.25) y (5.26) obtenemos

$$x = \frac{2(3)4}{3^2+1} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}; \quad y = \frac{(3^2-1)4}{3^2+1} = \frac{32}{10} = \frac{16}{5}$$

Entonces $x^2 = \frac{144}{25}, y^2 = \frac{256}{25}$ y nuevamente

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{144}{25} + \frac{256}{25} \\ &= \frac{400}{25} = 16 \end{aligned}$$

Solución particular dada por Diofanto. Considerando como el número cuadrado 16, sea x^2 uno de los números cuadrados, por lo tanto $16 - x^2$ debe ser igual al otro cuadrado.
Tomemos un cuadrado de la forma[5] $(mx - 4)^2$, siendo m un número entero y 4 el número que es la raíz cuadrada de 16, tomemos $(2x - 4)^2$ comparado con $16 - x^2$; por lo tanto

$$\begin{aligned} (2x-4)^2 &= 16 - x^2 \\ 4x^2 - 16x + \cancel{16} &= \cancel{16} - x^2 \\ 5x^2 - 16x &= 0 \qquad ; x \neq 0 \\ x &= \frac{16}{5} \end{aligned}$$

De donde se obtiene que $x = \frac{16}{5}$.

[5]Las palabras de Diofanto son: “formo el cuadrado de cualquier número de aritmos menos tantas unidades como hay en el lado de 16”. Esta implícito que m debe escogerse de modo que el resultado pueda ser racional; en este sentido Diofanto toma $m = 2$.

El primer cuadrado es $x^2 = \frac{256}{25}$
El segundo cuadrado esta dado por la expresión $16 - x^2$ esto es $16 - \frac{256}{25} = \frac{144}{25}$

A esta proposición Fermat añadió su nota famosa la cual con el tiempo se convertiría en lo que hoy conocemos como el "gran teorema" de Fermat. El texto de la nota es:
"Por otra parte es imposible separar un cubo en dos cubos, o un bicuadrado en dos bicuadrados, generalizando, cualquier potencia, excepto un cuadrado, no se puede dividir en dos potencias con el mismo exponente. He descubierto una demostración verdaderamente maravillosa de esto, que sin embargo el margen no es bastante grande para que quepa en el"

Diofanto, Fermat y la Aritmética han estado estrechamente relacionados a lo largo de la historia de las matemáticas. Todo empezó cuando Fermat, en su ejemplar de la Aritmética, escribió al lado del problema 8 del Libro II:

La ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones enteras para $n > 2$. En el caso $n = 2$ una solución es $(x, y, z) = (3, 4, 5)$ la cual ya se conocía desde la Grecia clásica. En general pueden obtenerse estas ternas, denominadas Pitagóricas, a partir de la expresión:

$$\begin{aligned} x &= 2n + 1 \\ y &= 2n^2 + 2n \\ z &= 2n^2 + 2n + 1 \end{aligned}$$

Para $n = 1, 2, 3, \ldots$
Efectivamente

$$\begin{aligned} z^2 &= (2n^2)^2 + 2(2n^2)(2n+1) + (2n+1)^2 \\ &= 4n^4 + 4n^2(2n+1) + 4n^2 + 4n + 1 \\ &= 4n^4 + 8n^3 + 4n^2 + (2n+1)^2 \\ &= 4n^2(n+1)^2 + (2n+1)^2 \\ &= (2n(n+1))^2 + (2n+1)^2 \\ &= (2n^2 + 2n)^2 + (2n+1)^2 = y^2 + x^2 \end{aligned}$$

En los Elementos de Euclides (libro X, ejercicio 28, lema I) aparece la expresión general de estas ternas:

$$x = a^2 - b^2$$
$$y = 2ab$$
$$z = a^2 + b^2$$

Efectivamente

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 &= a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2 \\ &= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 = z^2 \end{aligned}$$

Sin embargo, la demostración de esta proposición ha sido, hasta hace poco, el problema más famoso, al menos más popular, de las matemáticas y a su resolución se halla unido el nombre de grandes matemáticos. Euler demostró el teorema para $n = 3$ y $n = 4$. Dirichlet (1805 -1859) y Legendre (1752 - 1833) también intervinieron y probaron la proposición para $n = 5$, y muchos otros. Por fin, en 1995 el inglés Andrew Wiles lo logró (después de algunos sustos).

"No hay otro problema que pueda justificar lo mismo para mí. Fue la ilusión de mi infancia. Nada puede reemplazar eso. Lo he resuelto. Intentaré resolver otros problemas, estoy seguro. Algunos serán muy difíciles y tendré una sensación de realización otra vez, pero no hay ningún problema matemático que me pueda cautivar como lo hizo Fermat"

Andrew Wiles

6.3. Libro III

Consta de 21 problemas. El más famoso es el 19 en el que por primera vez acude a la geometría para solucionarlo.

1. *Problema 5.* Encontrar tres números tal que su suma es un cuadrado y la suma de cualquier par excede al tercero en un cuadrado.
   Solución particular dada por Diofanto. La suma de los tres debe ser $(x + 1)^2$;

luego el primero más el segundo es igual al tercero más uno.
Sean a, b y c los números, entonces

$$a + b + c = (x + 1)^2 \tag{6.27}$$

$$a + b = c + 1 \tag{6.28}$$

Reemplazando (5.28) en (5.27) tenemos

$$2c + 1 = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

de donde

$$\boxed{c = \frac{x^2}{2} + x} \tag{6.29}$$

De modo que el tercer número es $\frac{1}{2}x^2 + x$; luego el segundo más el tercero, es decir $b + c$ es igual al primero más x^2. Así que

$$b + c = a + x^2 \tag{6.30}$$

Reemplazando (5.30) de (5.27) tenemos

$$2a + \cancel{x^2} = (x + 1)^2 = \cancel{x^2} + 2x + 1$$

de donde

$$\boxed{a = x + \frac{1}{2}} \tag{6.31}$$

el primer número es $x + \frac{1}{2}$.
Ahora si reemplazamos el valor de a y de c en la ecuación (5.27) tenemos

$$x + \frac{1}{2} + b + \frac{x^2}{2} + x = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

de donde

$$\boxed{b = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}} \tag{6.32}$$

Por lo tanto el segundo número es igual a $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$.

Ejemplos:

a) Supongamos que el número cuadrado es 64.
Por lo tanto $a + b + c = 64 = 8^2$; aquí $x = 7$, reemplazando en (5.29), (5.31) y (5.32) respectivamente obtenemos

$$a = 7 + \frac{1}{2} = \frac{15}{2}; \quad b = \frac{49}{2} + \frac{1}{2} = 25; \quad c = \frac{49}{2} + 7 = \frac{63}{2}$$

Así que

$$a + b + c = \frac{15}{2} + 25 + \frac{63}{2} = \frac{78}{2} + 25 = 39 + 25 = 64$$

b) Supongamos que el número cuadrado es 81.
Por lo tanto $a + b + c = 81 = 9^2$; aquí $x = 8$, reemplazando en (5.29), (5.31) y (5.32) respectivamente obtenemos

$$a = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}; \quad b = \frac{64}{2} + \frac{1}{2} = \frac{65}{2}; \quad c = \frac{64}{2} + 8 = 40$$

Así que

$$a + b + c = \frac{17}{2} + \frac{65}{2} + 40 = \frac{82}{2} + 40 = 41 + 40 = 81$$

Encontramos que 4 y 9 son números cuadrados . Así trataremos de encontrar otro número cuadrado x^2 tal que $4 + 9 + x^2 = y^2$ por tanteo encontramos que 36 sirve porque $4 + 9 + 36 = 49$, ahora trataremos de encontrar tres números tales que la suma de cada par sea igual al tercero más un número conocido. En este caso supongamos

$$\text{Primero} + \text{segundo} - \text{tercero} = 4 \tag{6.33}$$

$$\text{Segundo} + \text{tercero} - \text{primero} = 9 \tag{6.34}$$

$$\text{Tercero} + \text{primero} - \text{segundo} = 36 \tag{6.35}$$

Sumando (5.33), (5.34) y (5.35) tenemos

$$\text{Primero} + \text{segundo} + \text{tercero} = 49$$

pero como

$$\text{Primero} + \text{segundo} = \text{tercero} + 4$$

entonces

$$2 \text{ tercero} + 4 = 49$$

de donde el tercero $= \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2}$.

De igual forma tenemos que

$$2 \text{ Primero} + 9 = 49$$

de donde el primero $= 20$

Además,

$$2 \text{ segundo} + 36 = 49$$

así que segundo $= \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$

Generalizando el ejercicio quedaría representado de la siguiente manera:
Encontrar x, y y z tales que:

$$\left.\begin{array}{r} -x+y+z = \text{un cuadrado} \\ x-y+z = \text{un cuadrado} \\ x+y-z = \text{un cuadrado} \end{array}\right\}$$

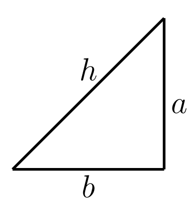
$$x+y+z = \text{un cuadrado}$$

Sólo tenemos que igualar las tres primeras expresiones a cuadrados a^2, b^2 y c^2 tales que $a^2+b^2+c^2 =$ un cuadrado, k^2 por ejemplo, puesto que la suma de las tres primeras expresiones es $x+y+z$. La solución es entonces:

$$x = \frac{1}{2}(b^2+c^2) \qquad y = \frac{1}{2}(c^2+a^2) \qquad z = \frac{1}{2}(a^2+b^2)$$

2. *Problema 19.* Encontrar cuatro números tales que el cuadrado de la suma de los cuatro, aumentado o disminuido en cada uno de ellos, forma un cuadrado.

   En cualquier triangulo rectángulo, (el cuadrado de la hipotenusa) $\pm$(doble del producto de los catetos) $=$ un cuadrado, pues



como $a^2 + b^2 = h^2$, entonces

$$h^2 \pm 2ab = a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Ahora debemos buscar cuatro triángulos rectángulos (en números racionales) que tengan la misma hipotenusa, o debemos encontrar un cuadrado que sea divisible en dos cuadrados de cuatro maneras diferentes. (Ver Libro II, Problema 8).

Tomemos triángulos rectángulos con los números más pequeños $(3, 4, 5)$ y $(5, 12, 13)$; y multipliquemos los lados del primero por la hipotenusa del segundo y viceversa. Esto da los triángulos $(39, 52, 65)$ y $(25, 60, 65)$; así 65^2 se descompone en dos cuadrados de dos maneras.
Una vez más, 65 se divide de forma natural en dos cuadrados de dos maneras, a saber, $7^2 + 4^2$ y $8^2 + 1^2$, "que se debe al hecho de que 65 es el producto entre 13 y 5, cada uno de los cuales es la suma de dos cuadrados".

Formemos ahora un triángulo rectángulo[6] a partir de 7 y 4. Los catetos son $(7^2 - 4^2, 2 \cdot 7 \cdot 4, 7^2 + 4^2)$ o $(33, 56, 65)$.
Análogamente, formando un triángulo rectángulo a partir de 8 y 1, obtenemos $(2 \cdot 8 \cdot 1, 8^2 - 1^2, 8^2 + 1^1)$ o (16, 63, 65).
Así pues, 65^2 se divide en dos cuadrados de cuatro maneras. Supongamos ahora que $65x$ es la suma de los números y:

Primer número	$2 \cdot 39 \cdot 52x^2 = 4056x^2$
Segundo número	$2 \cdot 25 \cdot 60x^2 = 3000x^2$
Tercer número	$2 \cdot 33 \cdot 56x^2 = 3696x^2$
Cuarto número	$2 \cdot 16 \cdot 63x^2 = 2016x^2$

Siendo los coeficientes de x^2 cuatro veces las áreas de los cuatro triángulos rectángulos respectivamente.

La suma $12768x^2 = 65x$, de donde $x = \frac{65}{12768}$, por lo tanto

los números son $\frac{17136600}{163021824}, \frac{12675000}{163021824}, \frac{15615600}{163021824}, \frac{8517600}{163021824}$

[6]si hay dos números p y q, "formar un triángulo rectángulo" a partir de ellos significa tomar los números $p^2 + q^2, p^2 - q^2, 2pq$. Estos son los lados de un triángulo rectángulo, puesto que $(p^2 + q^2)^2 = (p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2$

6.4. Libro IV

Casi todos los problemas de este libro (40) se refieren a números cúbicos. Como los griegos no conocían las fórmulas de la ecuación cúbica, la sagaz elección de los datos por parte de Diofanto hace que se llegue a una solución aceptable.

1. *Problema 1.* Descomponer un número dado en dos cubos cuya suma de raíces sea dada.

   “Si el número es 370 y la suma de las raíces 10, supongamos que la raíz del primer cubo es 1 aritmo y 5 unidades, o sea: la mitad de la suma de las raíces. Por tanto, la raíz del otro cubo será 5 unidades menos 1 aritmo; luego la suma de los cubos valdrá 30 cuadrados de aritmo más 250 unidades que igualaremos a las 370 unidades del número dado, de donde se deduce que 1 aritmo tiene 2 unidades; la raíz del primer cubo tendrá entonces 7 y la del segundo 3, y, por consiguientes, los cubos serán 343 y 27”.

   Con la notación actual, Diofanto resuelve el sistema formado por las ecuaciones

   $$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 370 \\ x + y &= 10 \end{aligned}$$

   Para lo que supone que $x = a + 5$ y que $y = 5 - a$ ($a = \textit{aritmo}$). Sustituyendo estas expresiones en la primera ecuación y desarrollando tendremos:

   $$\begin{aligned} (a+5)^3 + (5-a)^3 &= [(a+5) + (5-a)]\left[(a+5)^2 - (a+5)(5-a) + (5-a)^2\right] \\ &= 10\left[\cancel{a}^2 + \cancel{1}0a + \cancel{2}5 + \cancel{a}^2 - \cancel{2}5 + 25 - \cancel{1}0a + \cancel{a}^2\right] \\ &= 10\left[3a^2 + 25\right] \\ &= 30a^2 + 250 = 370 \end{aligned}$$

   luego

   $$\begin{aligned} 30a^2 &= 120 \\ a^2 &= 4 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

   así que $x = 7$ y $y = 3$. Por lo tanto $x^3 = 7^3$ y $y^3 = 3^3$.

2. *Problema 29.* Encontrar cuatro cuadrados cuya suma, aumentada en la suma de sus lados sea un número dado.

   En las notas sobre este problema se recogen las aportaciones de Bachet y de Fermat. Bachet afirma que: *"todo número entero es un cuadrado, o suma de dos, tres o a lo sumo cuatro cuadrados"*, pero confesando al mismo tiempo que no había sido capaz de demostrarlo.

   Y sobre este teorema (empírico) de Bachet, Fermat realiza la siguiente observación: **"Aún más, hay una proposición muy bella y completamente general que hemos sido los primeros en descubrir: Todo número es: o bien triangular, o bien la suma de 2 o 3 números triangulares. Cuadrado, o suma de 2, 3 o 4 cuadrados. Pentagonal, o suma de 2, 3, 4 o 5 pentagonales. Y así sucesiva e indefinidamente, ya sean hexagonales, heptagonales o poligonales cualesquiera"**.

   Legendre, Lagrange, Euler, Gauss realizaron distintas contribuciones parciales y fue Cauchy quien en 1813 logró la demostración completa del teorema.

   La solución particular dada por Diofanto es como sigue:
   Número dado 12. Ahora $x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ un cuadrado. Por lo tanto la suma de los cuatro cuadrados más la suma de sus lados más uno es igual a la suma de los otros cuatro cuadrados que es igual a 13, por hipótesis.
   Luego debemos dividir 13 entre los cuatro cuadrados; entonces si restamos $\frac{1}{2}$ de cada uno de sus lados, tendremos los lados de los cuadrados requeridos. Ahora

   $$13 = 4 + 9 = \left(\frac{64}{25} + \frac{36}{25}\right) + \left(\frac{144}{25} + \frac{81}{25}\right)$$

   Y los lados de los cuadrados requeridos son $\frac{11}{10}, \frac{7}{10}, \frac{19}{10}, \frac{13}{10}$, los cuadrados son respectivamente $\frac{121}{100}, \frac{49}{100}, \frac{361}{100}, \frac{169}{100}$.

6.5. Libro V

La mayoría de los problemas propuestos (28 de los 30 que tiene el libro) son problemas de segundo y tercer grado, es decir problemas en los que se tenían ecuaciones cuadráticas y cúbicas. En el último, el 30, Diofanto se aparta de su costumbre y propone un problema de los que hoy denominaríamos de "mezclas".

1. *Problema 16.* Encontrar tres números tales que el cubo de su suma menos uno cualquiera de ellos da un cubo.
   Solución particular dada por Diofanto. Sea x la suma, y los números $\frac{7}{8}x^3, \frac{26}{27}x^3, \frac{63}{64}x^3$.

   Por lo tanto $\frac{4877}{1728}x^3 = x$, y, si $\frac{4877}{1728}$ fuera la razón de un cuadrado a un cuadrado, el problema estaría resuelto.

   Pero $\frac{4877}{1728}x^3 = 3-$ (la suma de tres cubos).

   Por lo tanto debemos encontrar tres cubos, cada uno de los cuales menor que uno y tales que 3-(su suma)= un cuadrado.
   Si, por lo tanto, la suma de los tres cubos se hace menor que 1, el cuadrado será mayor que 2. Sea $2\frac{1}{4}$.
   Por lo tanto tenemos que encontrar tres cubos cuya suma sea $= \frac{3}{4}$ o $\frac{162}{216}$; es decir, tenemos que dividir 162 en tres cubos.
   Pero $162 = 125 + 64 - 27$; y "tenemos en los Porismos"[7] que la diferencia de los cubos puede transformarse en la suma de dos cubos.
   Habiendo encontrado así los dos cubos, empezamos de nuevo, y $x = 2\frac{1}{4}x^3$, de modo que $x = \frac{2}{3}$.
   Los tres números están asi determinados.

   Bachet, al no encontrar ninguna forma de dar con $2\frac{1}{4}$ como cuadrado particular que hay que tomar para que la diferencia entre este y tres pueda ser separable en tres cubos, y observando que no podía resolver el problema si tomaba otro cuadrado arbitrario entre dos y tres, $2\frac{7}{9}$ en lugar de $2\frac{1}{4}$, concluyó que Diofanto debía haber dado por pura casualidad con $2\frac{1}{4}$, que permite resolver el problema. Fermat no lo admitiría y consideró que el método utilizado por Diofanto

[7] Para Diofanto los Porismos son Lemas citados en su *aritmética*

para encontrar $2\frac{1}{4}$ como el cuadrado que había que tomar no debería ser difícil de descubrir. En consecuencia Fermat sugirió el método siguiente. Sea $x - 1$ el lado del cuadrado buscado que yace entre dos y tres. Entonces $3 - (x - 1)^2 = 2 + 2x - x^2$ y este tiene que descomponerse en tres cubos. Fermat supone que los lados de dos de los cubos buscados son dos expresiones en x tales que cuando la suma de sus cubos se resta de $2 + 2x - x^2$, el resultado solo contiene términos en x^2 y x^3 o en x y unidades.

La primera alternativa está asegurada si los lados del primero y segundo cubos son $1 - \frac{1}{3}$ y $1 + x$ respectivamente; pues

$$2 + 2x - x^2 - \left(1 - \frac{1}{3}x\right)^3 = (1 + x^3) = -4\frac{1}{3}x^2 - \frac{26}{27}x^3$$

La última expresión tiene que hacerse un cubo, para lo que ponemos

$$-4\frac{1}{3}x^2 - \frac{26}{27}x^3 = \frac{(m^3x^3)}{27} \text{ , por ejemplo,}$$

Lo que da un valor para x. Solo tenemos que ver que este valor hace $\frac{1}{3}x$ menor que uno, y podemos escoger fácilmente m para satisfacer esta condición. Supongamos $m = 5$, y encontramos $x = \frac{13}{11}$, de modo que

$$\frac{1}{3}x = \frac{13}{33} \qquad , \qquad 1 - \frac{1}{3}x = \frac{20}{33} \qquad , \qquad 1 + x = \frac{72}{33}$$

Y el lado del tercer cubo es $-\frac{65}{33}$.

El cuadrado $(x - 1)^2 = \left(\frac{2}{11}\right)^2$, y en efecto $3 - \left\{\left(\frac{20}{33}\right)^3 + \left(\frac{72}{33}\right)^3 - \left(\frac{65}{33}\right)^3\right\} = \left(\frac{2}{11}\right)^2$.

Entonces tenemos tres cubos cuya suma excede en tres a cierto cuadrado; pero, mientras que el primero de estos cubos es menor que uno, el segundo es mayor que uno y el tercero es negativo. Por ello debemos proceder, como Diofanto, a transformar la diferencia entre los dos últimos cubos en la suma de los otros dos cubos.

Sin embargo, se verá por ensayo y error que incluso el método de Fermat no es totalmente general pues, de hecho, no dará la solución particular obtenida por Diofanto en la que el cuadrado es $2\frac{1}{4}$.

2. *Problema 30.* Una persona se embarcó con sus sirvientes, quienes le encargaron que les fuera útil. Mezcló garrafas de vino, unas de 8 dracmas[8] y otras de 5, y pagó por todo un número cuadrado que, aumentado en el número de unidades que se te indicará, 60, hará que tengas otro cuadrado cuya raíz es el número total de garrafas. Averigua cuántas había de 8 y cuántas de 5 dracmas

   Sea $x =$ al número total de medidas; por lo tanto $x^2 - 60$ fue el precio pagado, que es un cuadrado, digamos $(x-m)^2$, así que

$$\begin{aligned} x^2 - 60 &= (x-m)^2 \\ \cancel{x}^2 - 60 &= \cancel{x}^2 - 2mx + m^2 \\ 2mx &= m^2 + 60 \\ x &= \frac{m^2+60}{2m} \end{aligned} \tag{6.36}$$

   Ahora $\frac{1}{5}$ del precio de las garrafas de 5 dracmas mas $\frac{1}{8}$ del precio de las garrafas de 8 dracmas $= x$; de modo que $x^2 - 60$, el precio total, tiene que dividirse en dos partes tales que $\frac{1}{5}$ de una más $\frac{1}{8}$ de la otra sea igual x:

   No podemos tener una solución real de esto a menos que

$$x > \frac{1}{8}(x^2 - 60) \qquad \text{y} \qquad x < \frac{1}{5}(x^2-60)$$

   Por lo tanto $5x < x^2 - 60 < 8x$.

   a) Puesto que $x^2 > 5x + 60, x^2 = 5x$ mas un número mayor que 60. Dado que $x^2 - 5x - 60 > 0$; hagamos $x^2 - 5x - 60 = 0$, así que

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25+240}}{2} \approx \frac{5 \pm 16}{2}; \;\; x = \frac{5+16}{2} = \frac{21}{2}$$

   Luego x es mayor o igual a 11, es decir, x no es menor que 11.

   b) $x^2 < 8x + 60$ o $x^2 = 8x$ más un número menor que 60. Dado que $x^2 - 8x - 60 > 0$; hagamos $x^2 - 8x - 60 = 0$, así que

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64+240}}{2} \approx \frac{8 \pm 17}{2}; \;\; x = \frac{8+17}{2} = \frac{23}{2}$$

   Luego x es mayor o igual a 12, es decir, x no es menor que 12.

[8]Medida de peso utilizada en farmacia, equivalente a la octava parte de una onza, es decir, 3594 mg

Por lo tanto $11 < x < 12$.

Puesto que $x = \frac{(m^2+60)}{2m}$; tenemos que $22m < m^2 + 60 < 24m$.

Así pues $22m = m^2+$ (un número menor que 60), y por lo tanto m no es menor que 19.

$24m = m^2+$ (un número mayor que 60), y por lo tanto m es menor que 21. De aquí, hacemos $m = 20$, y

$$x^2 - 60 = (x - 20)^2,$$

De modo que $x = 11\frac{1}{2}, x^2 = 132\frac{1}{4}$, y $x^2 - 60 = 72\frac{1}{4}$.

Así pues tenemos que dividir $72\frac{1}{4}$ en dos partes tales que $\frac{1}{5}$ de una parte más $\frac{1}{8}$ de la otra sea igual a $11\frac{1}{2}$.

Sea la primera parte $5z$.

Por lo tanto $\frac{1}{8}$ (segunda parte) $= 11\frac{1}{2} - z$, o segunda parte igual a $92 - 8z$; por lo tanto $5z + 92 - 8z = 72\frac{1}{4}$, y $z = \frac{79}{12}$.

Por lo tanto el número de garrafas de 5 dracmas $= \frac{79}{12}$

Por lo tanto el número de garrafas de 8 dracmas $= \frac{59}{12}$

6.6. Libro VI

Dedicado a resolver triángulos rectángulos de lados racionales; consta de 24 problemas.

1. *Problema 1.* Encontrar un triángulo tal que la hipotenusa menos una y otra de las perpendiculares hagan un cubo.

   El triángulo requerido está formado por los catetos x y 3.
   Por lo tanto la hipotenusa es igual $x^2 + 9$, una perpendicular es igual a $6x$, y

su base es $x^2 + 9$.
Así $x^2 + 9 - (x^2 - 9) = 18$ debería ser un cubo, pero no lo es. Ahora $18 = 2 \cdot 3^2$; por lo tanto debemos sustituir 3 por m, donde $2 \cdot m^2$ es un cubo; y $m = 2$.

Formamos con estas medidas (x y 2) un triángulo rectángulo: $(x^2+4;\ 4x;\ x^2 - 4)$; y una condición es satisfecha.

El otro da $x^2 - 4x + 4 =$ a un cubo; por lo tanto $(x-2)^2$ es un cubo, digamos $64 = 4^3 = 8^2$ así que $x - a = 8$ o $x - 2 = -8$ de donde $x = 10$ (descartando $x = -6$ por ser negativo) y las medida del triángulo son 40, 96 y 104.

2. *Problema 17.* Encontrar un triángulo rectángulo tal que su área más su hipotenusa sea un cuadrado y su perímetro sea un cubo.

   Sea el área igual a x y la hipotenusa algún cuadrado menos x, puede ser $16 - x$. El producto de las perpendiculares es igual a $2x$; por lo tanto, si uno de ellos es 2, el otro es x, y el perímetro es igual a 18, el cual no es un cubo.
   Por lo tanto debemos encontrar un cuadrado que sumado con 2 se haga un cubo.

   Sea uno de los lados del cuadrado $m+1$ y el del cubo $m-1$, así que

$$(m-1)^3 = (m+1)^2 + 2$$

   es decir

$$m^3 - 3m^2 + 3m - 1 = m^2 + 2m + 1 + 2$$

   de aquí

$$\begin{aligned} m^3 - 4m^2 + m - 4 &= 0 \\ m^2(m-4) + (m-4) &= 0 \\ (m-4)(m^2+1) &= 0 \end{aligned}$$

   de donde $m = 4$, por lo tanto el lado del cuadrado es 5 y del cubo es 3.

   Asumimos ahora que x es el área del triángulo original, $25 - x$ la hipotenusa, 2 y x por las perpendiculares, así que

$$p = 25 - x + 2 + x = 27 = 3^3$$

Luego, el perímetro del triángulo es un cubo.

Pero

$$\begin{aligned}(25-x)^2 &= x^2+2^2\\ 625-50x+x^2 &= x^2+4\end{aligned}$$

de donde

$$621 = 50x$$

así que

$$x = \frac{621}{50}.$$

Capítulo 7
Conclusiones

1. Diofanto introdujo el primer simbolismo propiamente matemático, pues la matemática griega había carecido de cualquier simbolismo especial, era una matemática "retórica".

2. A pesar de ser uno de los principales algebristas de Grecia no se tiene mucha información acerca de su vida, todo lo relacionado con él tiene que ver con su obra *La Aritmética*. Su aporte fue muy significativo en la búsqueda de un lenguaje apropiado para solucionar problemas.

3. Matemáticos como Fermat fueron atraídos por el trabajo de Diofanto, logrando así grandes avances en la formulación de Teoremas que han trascendido hasta nuestros días.

4. Diofanto siempre estuvo restringido a solo un valor de la incógnita (solo consideraba positivos y racionales), nunca hablo de la generalidad aunque claramente la percibió.

5. Diofanto presenta en todos los problemas de *La Aritmética* una solución única y no establece distinción entre problemas determinados e indeterminados; en cuanto a la naturaleza de los problemas o los métodos de resolución usados por Diofanto no existe ningún orden.

Bibliografía

[1] *Stephen Hawking*, Dios creo los números. Critica, S, L. España, 2006.

[2] *Thomas HeatH*, Diophantus of Alexandria: A study in the History of Greek Algebra (Dover, New york, 1964), Universidad de Cambridge, 1910.

[3] *Piedad Yuste*, Ecuaciones cuadraticas y procedimientos algoritmicos. Diofanto y las matemáticas en Mesopotamia, 2008

[4] *Mariano Martinez Perez*, El final de la matemática Helenística: Diofanto. Universidad Complutense, Madrid.

[5] *http://www.arrakis.es/ mcj/diofanto.htm*

[6] *http://oso.izt.uam.mx/ gnumat/histmat/Diofanto/pdf/diofanto.pdf "Del algebra de Diofanto a la ecuacion de Pell"*